

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL

POLITICAS DE PRECIO PARA BIENES PERECIBLES

Prof. Guía : Susana Mondschein
Prof. Taller : Andrés Weintraub
Prof. Informante : Eduardo Engel

Santiago, 14 de julio de 1995.

Contents

1	INTRODUCCION	1
1.1	ANTECEDENTES BIBLIOGRAFICOS	2
1.2	MODELO BASE	3
1.2.1	Modelo de Tiempo Continuo	5
1.2.2	Modelo de Revisiones Periódicas	6
1.3	ALCANCES DEL ESTUDIO	7
1.3.1	Modelo de Múltiples Tiendas	7
1.3.2	Análisis de Propagación de Error	7
1.3.3	Aplicación	8
1.4	METODOLOGIA	8
2	MODELO DE TIEMPO CONTINUO PARA DOS TIENDAS	9
2.1	INVENTARIOS SEPARADOS	9
2.1.1	Propiedades Básicas de la Función de Beneficio	10
2.1.2	Extensión	13
3	ANALISIS DE PROPAGACION DE ERROR	15
3.1	RESULTADOS PRELIMINARES	15
3.1.1	Suma	15
3.1.2	Multiplicación	16
3.2	INVENTARIO MAYOR O IGUAL AL PERIODO	16
3.3	INVENTARIO MENOR QUE EL PERIODO	18
3.3.1	Sobreestimación de los Beneficios	18
3.3.2	Cotas para el Error Porcentual de los Beneficios	20
3.4	CASO GENERAL	20

4	MODELO DE REVISIONES PERIODICAS	23
4.1	SUPUESTOS	23
4.2	MODELO DE UNA TIENDA	24
4.2.1	Modelo de Precio Constante	25
4.2.2	Modelo de Dos Periodos	31
4.3	MODELO DE DOS TIENDAS	33
4.3.1	Modelo de Dos Tiendas con División Eficiente del Inventario	35
5	APLICACION	37
5.1	RECOLECCION DE DATOS	38
5.2	VALIDACION DEL SUPUESTO DE LAS LLEGADAS DE LOS CLIENTES	38
5.2.1	Aspectos Metodológicos	39
5.2.2	Resultados	42
5.3	DISTRIBUCION DEL PRECIO DE RESERVA	43
5.3.1	Aspectos Metodológicos	44
5.3.2	Resultados	46
5.4	FUNCION DE BENEFICIO	47
5.5	COMPARACION	50
6	CONCLUSIONES	53
7	ANEXO I	59
8	ANEXO II	65
9	ANEXO III	69
9.1	PARTE A:RESULTADOS PRELIMINARES	69
9.1.1	Suma	69
9.1.2	Multiplicación	69
9.2	PARTE B1	70
9.3	PARTE B2	70
10	ANEXO IV	73
10.1	PARTE A	73
10.2	PARTE B	78

10.3 PARTE C 79

10.4 PARTE D 80

10.5 PARTE E 81

10.6 PARTE F 82

10.7 PARTE G 82

10.8 PARTE H 83

10.9 PARTE I 85

10.10PARTE J 86

10.11PARTE K 88

11 ANEXO V 91

Chapter 1

INTRODUCCION

Sin duda que la relación precio producto, va mas allá de una simple valoración económica. El precio aparece como un índice de calidad, un parámetro de status y prestigio; Kalwani y Yim (1992) interpretan lo anterior planteando como los consumidores se forman expectativas de precio y esperan encontrar los productos dentro de dichos niveles. Elegir el precio que un producto debe tener y cómo debe evolucionar en el tiempo es un proceso de decisión complejo, y que involucra no sólo a las funciones de costos y a los márgenes de utilidad deseados. Por ello, es fundamental que las compañías se replanteen sus políticas de fijación de precio y el rol que éstas desempeñan en mercados cada vez más complejos.

El presente trabajo busca definir estrategias de precio para bienes perecibles, extendiendo el trabajo realizado por Bitran y Mondschein (1994) en su artículo “Periodic Pricing of Seasonal Products in Retailing”. Bitran y Mondschein estudian el comportamiento óptimo del precio a lo largo de un periodo de tiempo definido, para un producto perecible que es vendido en una tienda. La principal extensión que se realizará al modelo de Bitran y Mondschein corresponde al aumento del número de tiendas en las que simultáneamente se vende el mismo producto. Además, se aplicarán los modelos desarrollados al caso particular de una importante tienda por departamentos chilena comparándose los ingresos por venta asociados a su actual sistema de fijación de precios con los que se obtendrían usando los modelos aquí desarrollados.

Los productos perecibles, como se entiende en este trabajo, son todos aquellos bienes que manifiestan algún tipo de obsolescencia; esta puede ser “física”, es decir, productos con fecha de vencimiento, deterioro o desgaste a través del tiempo, como por ejemplo alimentos perecibles o pasajes de avión. Otro grupo de productos que caen en la categoría de perecibles, como se entiende en este trabajo, son aquellos que presentan obsolescencia “sicológica”, y son

aquellos productos que están sujetos a algún tipo de moda, principalmente vestuario, y que pasado cierto periodo, dejan de interesar a los consumidores.

Estas dos categorías de producto perecibles definidos anteriormente, comparten ciertas características, las cuales permiten considerarlos como idénticos desde el punto de vista de este estudio. Estas características corresponden a un horizonte de venta finito y un valor residual, pasado este horizonte, muy bajo (cero en algunos casos). Lo que este estudio busca, es extender los trabajos desarrollados hasta la fecha, manteniendo siempre presente las posibles aplicaciones prácticas que los resultados encontrados puedan tener.

1.1 ANTECEDENTES BIBLIOGRAFICOS

Existe dentro de la bibliografía un gran número de trabajos que se relacionan con el tema de las estrategias de precio y sus efectos sobre las conductas de compra por parte de los consumidores, dentro del marco de lo que son los productos perecibles . Sin embargo, son muy pocos los que desarrollan, en términos formales, algún tipo de modelo que estructure dichas estrategias.

La búsqueda de políticas óptimas de precio ha sido enfocada desde distintas perspectivas por economistas e investigadores en marketing y operaciones. Los economistas, por décadas, han enfocado sus modelos en torno a las teorías del consumidor, las que consideran consumidores racionales maximizadores de utilidad. Estos estudios se concentran en torno a equilibrios de precio determinísticos, dejando de lado aspectos tácticos relacionados con demandas estocásticas y niveles de inventario. Además, estos estudios son generalmente enfocados a la industria en forma agregada, descuidando un análisis más fino asociado a productos específicos de una empresa o tienda en particular.

Para los investigadores en marketing, las estrategias de precio son una importante herramienta para incrementar los ingresos. Dentro de este grupo, una importante línea de trabajo está vinculada al estudio de los efectos sobre los consumidores de las distintas políticas promocionales, como por ejemplo, las modificaciones de precio. La mayoría de los trabajos en esta área son de carácter cualitativo y buscan explicar ciertos comportamientos de compra observados en la práctica. La importancia que estos trabajos tienen en este estudio, tiene relación con la forma funcional que debe existir entre precio y demanda. Así por ejemplo, Kalwani y Yim (1993) señalan que los consumidores se forman expectativas de precios

y es por ello que precios bajos pueden tener efectos negativos sobre las ventas. Por otro lado, tanto Kahn y Raju (1991), Lichtenstein, Ridgway y Netemeyer (1993) como Gupta y Morrison (1991) muestran como la heterogeneidad que existe entre los consumidores de un mismo bien, se traduce en efectos completamente distintos en sus conductas de compra ante variaciones en el precio.

Por su parte, los estudios realizados en el tema por parte de investigadores en operaciones aparecen, si bien poco extenso, como estructurados y formales. Los primeros pasos dados en el área, corresponden a Belobaba (1987-89) en su estudio del comportamiento tarifario de las aerolíneas. En este modelo ya se reconocen algunos aspectos importantes como una demanda estocástica, un horizonte finito y el rol fundamental que juega el nivel de inventario sobre el nivel de precio. En el trabajo de Rajan, Rakesh y Steinberg (1992) se generalizan los conceptos básicos y bajo ciertos escenarios específicos se identifican ciertos patrones de comportamiento para el precio. Mas cercano a la línea de este estudio se encuentran el trabajo de Lazear (1988), usando un modelo simplificado de demanda aleatoria, Lazear estudia los efectos que provocan sobre el precio el nivel de inventario y un horizonte de venta finito, determinando conductas óptimos para el precio.

Los modelos estudiados por Gallego y Van Ryzin (1992) y Bitran y Mondschein (1994) son el punto de partida para este trabajo. En ellos se considera, por un lado, una actitud de compra, por parte de los consumidores, caracterizada por un proceso Poissoniano de llegada a los puntos de venta y una cierta función de distribución de probabilidad general para el precio de reserva (precio máximo dispuesto a pagar) de los clientes. Se define un horizonte finito de venta y un nivel inicial de inventario. Los modelos son resueltos usando técnicas de programación dinámica, encontrándose políticas óptimas para el precio durante el tiempo y su relación con el nivel de inventario.

1.2 MODELO BASE

A continuación se describen las distintas variables, parámetros y funciones que intervienen en la formulación de los distintos modelos que se presentarán en este trabajo . Para ello, y con el fin de ejemplificar la estructura funcional bajo la cual se relacionan estos elementos, se expondrá el modelo utilizado por Bitran y Mondschein (1994), que es, como ya fue dicho,

la base de las distintas variantes que este estudio desarrolla.

Bitran y Mondschein estudian el caso de una tienda única, la cual vende cierto bien, durante un período de tiempo limitado. Este modelo asume un proceso de llegada Poissoniano, para los potenciales consumidores, con una tasa de llegada que no depende del precio, sino más bien del tiempo, de los esfuerzos publicitarios del vendedor y de las características generales del producto, como por ejemplo, bien de primera necesidad o suntuario. La independencia de la tasa de llegada de los clientes con el precio aparece como una buena aproximación para tiendas que manejan un gran número de productos, y a las cuales llegan los clientes motivados principalmente por la variedad y comodidad más que por los niveles de precio que en general desconocen con exactitud.

La población de consumidores es caracterizada por el máximo precio que estos están dispuestos a pagar por el bien, es decir, sus precios de reserva. Si el precio de venta es menor que el precio de reserva, los clientes compran el producto. Los vendedores sólo conocen una distribución de probabilidad de los precios de reserva y por tanto tienen conciencia que un precio alto puede significar perder un cliente y un precio bajo puede significar la pérdida del excedente del consumidor.

Al comienzo de cada período, el vendedor debe decidir el precio a cobrar de modo de maximizar el beneficio neto esperado sobre el horizonte de venta, dado un nivel de inventario disponible, el proceso aleatorio de llegada y la distribución del precio de reserva. Además, al comienzo del período de venta, el vendedor adquiere el stock de producto que venderá y no le es posible acceder a más durante la temporada de venta. El principal motivo que en general imposibilita el reordenamiento de producto es que el tiempo que tarda en llegar a la tienda un pedido es mayor que el tiempo restante de venta. Por ejemplo, en lo que se refiere a ropa de moda, esta generalmente se importa del extranjero (en algunas ocasiones son las telas necesarias para su fabricación), por lo tanto cuando una tienda nota que le hará falta más de un cierto artículo, el tiempo que resta para el fin de temporada no es suficiente para justificar un pedido.

Es importante destacar que en este modelo son las disminuciones de precio las que incentivan las ventas, sin embargo, las ventas no aumentan por un mayor número de clientes que llegan a la tienda, sino más bien por el aumento de la fracción de personas que, una vez

en la tienda, se interesan por el producto.

Por otro lado, el problema es abordado por los investigadores de dos maneras. La primera asume que el precio puede ser modificado arbitrariamente, en cualquier instante del período de venta, y recibe el nombre de modelo de tiempo continuo. La segunda, más realista, asigna una revisión periódica de los precios en fechas precisas, por ejemplo al comienzo de cada semana.

La notación utilizada es la siguiente:

λ = tasa de llegada por unidad de tiempo de los consumidores.

C = inventario inicial al comienzo del horizonte de venta.

H = horizonte de venta.

$f(x)$ = función de densidad de probabilidad para los precios de reserva.

$F(x)$ = función de distribución acumulativa para los precios de reserva.

1.2.1 Modelo de Tiempo Continuo

En este modelo se subdivide el horizonte de planificación en intervalos de tiempo suficientemente pequeños, de manera que a lo más una llegada pueda ocurrir en dicho tiempo. En rigor, la formulación de tiempo continuo se obtiene cuando el ancho de estos intervalos tiende a cero.

Se define $V_t(c)$ como el máximo beneficio esperado si se dispone de un inventario c al comienzo del período t . La probabilidad de vender una unidad al precio p en el periodo t es igual al producto de las probabilidades que una llegada ocurra en ese periodo y que el precio de reserva de dicho consumidor sea mayor o igual a p . Definiendo Δt como el intervalo de tiempo en el cual a lo más una llegada puede ocurrir (Δt queda determinado por la tasa, λ , de llegadas de los clientes), el número de periodos durante el horizonte de venta es igual a $T = H/\Delta t$.

La formulación matemática para este modelo es:

$$V_t(c) = \max_{p \geq 0} \{ \Delta t \lambda (1 - F(p))(p + V_{t-1}(c-1)) + (1 - \Delta t \lambda (1 - F(p))) V_{t-1}(c) \} \quad (1.1)$$

Condiciones de Borde:

$$V_t(0) = 0 \quad \forall t = 0, 1, 2, \dots, T.$$

$$V_0(c) = 0 \quad \forall c \in N.$$

Dos de los resultados más importantes, que Bitran y Mondschein encuentran para este modelo son:

“El precio óptimo para un período dado es decreciente con el nivel de inventario”.

$$p_{t,c} \geq p_{t,c+1} \quad \forall t, c.$$

donde $p_{t,c}$ es el precio óptimo a cobrar en el período t si el nivel de inventario disponible es c .

“El precio óptimo para un nivel de inventario dado es decreciente en el tiempo”.

$$p_{t,c} \geq p_{t-1,c} \quad \forall t, c.$$

Combinando los dos resultados anterior, es posible mostrar que la trayectoria que sigue el precio a través del tiempo no es monótona, siendo decreciente durante los períodos en que no se realizan ventas y creciendo bruscamente en los instantes en que éstas se producen.

1.2.2 Modelo de Revisiones Periódicas

En este modelo, se asume que el precio sólo puede modificarse en ciertos instantes predefinidos durante el ciclo de venta. Definiendo, K como el número de veces que el precio es modificado, y T_k como la duración del k -ésimo intervalo se tiene que la suma de los T_k es igual a H .

En estas condiciones, dado que las duraciones de los intervalos de precio fijo son arbitrarias, se tiene que la probabilidad que lleguen n clientes a la tienda es significativa (no despreciable) para todo entero n , en cualquiera de los K períodos.

Definiendo $VP_k(c)$ como el beneficio esperado máximo desde el período k en adelante si el inventario disponible es c . La formulación matemática en este caso es:

$$VP_k(c) = \max_{p \geq 0} \sum_{j=0}^{\infty} [(min(c, j)p + VP_{k-1}(c - min(c, j)))] Pr(D_k(p) = j) \quad (1.2)$$

Condiciones de Borde:

$$VP_k(0) = 0 \quad \forall k.$$

$$VP_0(c) = 0 \quad \forall c.$$

En la ecuación anterior, $Pr(D_k(p) = j)$ corresponde a la probabilidad que j consumidores demanden efectivamente el bien a un precio p en el período k .

Los dos modelos anteriores representan el punto de partida para las variantes que este estudio desarrolla, las que son descritas a continuación.

1.3 ALCANCES DEL ESTUDIO

A partir de los resultados anterior, el presente trabajo se extiende a un escenario menos simplificado que se presenta en este tipo de mercados, como es el caso de múltiples tiendas. Además, analiza el comportamiento de los resultados frente a variaciones en las estimaciones de la demanda estudiando la propagación del error a través del modelo. Por último, se aplicarán los modelos desarrollados al caso particular de una tienda por departamentos chilena.

1.3.1 Modelo de Múltiples Tiendas

En esta sección se estudia el caso de una compañía que dispone de dos tiendas para vender sus productos. Cada tienda enfrenta una demanda particular (distintas) y las decisiones a tomar tienen relación con la forma en que se debe administrar el inventario disponible y el comportamiento que el precio debe tener. Se estudiará el caso particular en que ambas tiendas fijan un precio común cada periodo, puesto que en el caso de fijar precios por separado el modelo desarrollado por Bitran y Mondschein (1994) permite determinar las estrategias de precio óptimas en cada tienda por separado.

1.3.2 Análisis de Propagación de Error

En este punto se busca medir la sensibilidad del modelo y de los resultados que genera en función de sus parámetros. Es decir, como cambian las estrategias de precios y los valores

de la función de beneficio si los parámetros observados que caracterizan a la demanda se mueven dentro de cierto rango.

1.3.3 Aplicación

Por último, este trabajo concluye con la aplicación de los resultados obtenidos a un caso particular de una cadena de tiendas por departamentos chilena. Con este punto, se intenta por un lado validar el modelo desarrollado, como también determinar la magnitud de los beneficios que su aplicación puede generar.

La metodología utilizada en el planteamiento y resolución de estos puntos se describe a continuación.

1.4 METODOLOGIA

La metodología para desarrollar el tema descrito se compone de las siguientes etapas:

- **Formulación del Problema:** Reconocer los distintos elementos involucrados, las relaciones funcionales que los unen y las restricciones impuestas, obteniendo como resultado un modelo matemático que represente el problema a estudiar.
- **Resolución del Modelo:** El siguiente paso consiste en encontrar condiciones de optimalidad y como se traducen éstas en las conductas y valores de las variables de interés.
- **Desarrollo de las Soluciones:** Una vez resuelto el modelo y encontradas, lo más simplificadas posibles, las condiciones que caracterizan el óptimo, corresponde desarrollar técnicas que permitan, para cada situación específica, identificar el comportamiento de esta solución óptima. Para ello, se deberán implementar programas computacionales utilizando heurísticas que permitan acceder fácilmente a la solución.
- Una vez desarrolladas las soluciones al problema, corresponderá analizarlas a la luz de lo observado en la práctica. El objetivo es poder decidir si en la realidad se opera de acuerdo a los resultados encontrados, o si bien los supuestos y simplificaciones utilizados deben ser replanteados con el objeto de hacer más realistas los resultados.

Chapter 2

MODELO DE TIEMPO CONTINUO PARA DOS TIENDAS

2.1 INVENTARIOS SEPARADOS

Este caso corresponde a un escenario bastante usual en la práctica, y es el de una cadena de tiendas (en este modelo dos) que vende sus productos fijando un precio común entre las tiendas ¹, las cuales enfrentan consumidores distintos tanto en su proceso de llegada a la tienda, como en su disponibilidad a pagar por el producto. Al comienzo del periodo de venta las tiendas se dividen el inventario total, sin poder intercambiar productos posteriormente.

La tienda i -ésima ($i=1,2$) se caracteriza por tener un inventario c_i y por la llegada de sus clientes de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ_i . Además el precio de reserva para los clientes de la i -ésima tienda se caracteriza por una función de distribución $F_i(p)$.

En este modelo se asume que el precio es revisado en cada instante, o bien, es revisado cada Δt unidades de tiempo con Δt suficientemente pequeño. De esta forma, durante este periodo de tiempo, la probabilidad que lleguen dos o más clientes es despreciable para el conjunto de tiendas. Más aún, como el proceso de compra completo es Poissoniano y que el intervalo de tiempo es muy pequeño, se tiene que la probabilidad de vender una unidad en la tienda i es:

$$\lambda_i(p) = \lambda_i(1 - F_i(p))\Delta t \quad (2.1)$$

Tomando en cuenta lo anterior, la función de beneficio conjunta para la dos tiendas en

¹Si las tiendas no fijan sus precios en común entonces el problema de fijación de precio puede resolverse por separado (Bitran y Mondschein (1994))

un instante t con inventarios c_1 y c_2 para la tienda 1 y 2 respectivamente es $B_t(c_1, c_2)$ con:

$$\begin{aligned} B_t(c_1, c_2) &= \max_{p \geq 0} \{p[\lambda_1(p) + \lambda_2(p)] + B_{t-1}(c_1 - 1, c_2)\lambda_1(p) \\ &+ B_{t-1}(c_1, c_2 - 1)\lambda_2(p) + B_{t-1}(c_1, c_2)(1 - \lambda_1(p) - \lambda_2(p))\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Condiciones de Bordes:

$$B_0(c_1, c_2) = 0 \quad \forall c_1, c_2 \geq 0$$

$$B_t(0, 0) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

Por otro lado, dentro del marco de este estudio, se exigirán ciertas características a la función de demanda y por tanto si una función de demanda las satisface se dirá que es regular, o bien, que satisface las condiciones de regularidad. Estas características son:

- $\lambda_i(p) > 0 \quad \forall p > 0$
- $\exists! p^* > 0$ máximo local de $p\lambda_i(p)$

La primera condición señala que siempre existe una probabilidad no nula de vender una unidad de producto para todo nivel de precio. La segunda condición indica que el beneficio asociado a la venta de una unidad es una función pseudocóncava del precio.

En lo que sigue, todos los resultados obtenidos presuponen que las demandas son regulares en términos de las relaciones antes expuestas.

2.1.1 Propiedades Básicas de la Función de Beneficio

Algunas de las principales propiedades básicas que satisface la función de beneficio son las siguientes:

La propiedad 1 expresa un resultado que está muy ligado a la formulación misma del problema. En efecto, como el modelo asume que a lo más una unidad puede venderse por periodo, entonces en una tienda se podrá vender a los más tantas unidades como el número de periodos que restan. Por lo tanto si una tienda tiene un número de unidades de producto superior o igual al número de periodos que faltan entonces no reportará beneficio alguno aumentar el inventario de esa tienda.

Propiedad 1: $\forall c_2 \geq 0$ y $\forall c_1 \geq t$

$$B_t(c_1 + 1, c_2) = B_t(c_1, c_2) \quad (2.3)$$

La segunda propiedad complementa la anterior, diciendo que al aumentar el inventario de una tienda para un periodo dado, el beneficio esperado aumenta. Siempre y cuando el inventario de la tienda a la cual se le incrementa el stock no es mayor al número de periodos que faltan.

Propiedad 2: $\forall c_2 \geq 0$ y $\forall c_1 < t$

$$B_t(c_1 + 1, c_2) > B_t(c_1, c_2) \quad (2.4)$$

Las dos condiciones anteriores son el claro reflejo del principio de más es mejor, puesto que al no considerar las funciones de beneficio los costos de compra o producción de los bienes, aumentar el inventario se traduce solamente en un número mayor de ventas posibles, y por tanto en un beneficio esperado mayor.

La propiedad 3 en cambio describe una característica particular del modelo, más aún, del tipo de producto que se estudia. Que un producto sea perecible, desde el punto de vista del vendedor, significa tratar de venderlo lo antes posible al mejor precio, por lo tanto si durante un periodo no se venden productos el beneficio esperado disminuye.²

Propiedad 3: $\forall c_1, \forall c_2$ con $c_1 \neq 0$ ó $c_2 \neq 0$

$$B_{t+1}(c_1, c_2) > B_t(c_1, c_2) \quad (2.5)$$

Se debe hacer notar, que todas las propiedades están expresadas en términos del nivel de inventario c_1 , pero tienen claramente su equivalente para el nivel de inventario de la tienda 2 (c_2). Con el objeto de poder identificar las propiedades relacionadas con c_2 , se señalarán mediante una ('), es decir, por ejemplo, la propiedad 1' dice que $B_t(c_1, c_2 + 1) = B_t(c_1, c_2)$ cuando c_2 es mayor o igual a t .

Las demostraciones de estas propiedades se presentan en el ANEXO I.

A continuación, se enuncian dos proposiciones que describen el comportamiento del precio óptimo, en términos del nivel de inventario y el periodo.

²Esta característica podría presentarse en modelos de productos no perecibles pero que incorporaran algún tipo de reajuste monetario o tasa de descuento

Proposición 1 *Si la función de beneficio satisface las siguientes condiciones:*³:

- $\forall c_2 \geq 0$ y $\forall c_1 \leq t$

$$B_{t+1}(c_1 + 1, c_2) - B_{t+1}(c_1, c_2) > B_t(c_1 + 1, c_2) - B_t(c_1, c_2)$$

entonces, para niveles de inventarios dados, el precio óptimo es no creciente con el período, es decir:

$$p_{t+1}(c_1, c_2) \geq p_t(c_1, c_2) \quad \forall c_1, c_2$$

La condición $B_{t+1}(c_1 + 1, c_2) - B_{t+1}(c_1, c_2) > B_t(c_1 + 1, c_2) - B_t(c_1, c_2)$ exigida en la proposición anterior señala que los incrementos en el inventario de una tienda son más beneficiosos cuando se dispone de más tiempo para la venta. Esta condición es bastante razonable si se piensa que el beneficio adicional de una unidad más se hace palpable sólo cuando la unidad extra es vendida, lo que es más probable cuando se dispone de un número mayor de periodos de venta.

Proposición 2 *Si la función de beneficio satisface las siguientes condiciones:*

- $\forall c_2 \geq 0$ y $\forall c_1 < t$

$$B_t(c_1 + 1, c_2) - B_t(c_1, c_2) > B_t(c_1 + 2, c_2) - B_t(c_1 + 1, c_2)$$

- $\forall c_1 < t$ y $\forall c_2 < t$

$$B_t(c_1 + 1, c_2) - B_t(c_1, c_2) > B_t(c_1 + 1, c_2 + 1) - B_t(c_1, c_2 + 1)$$

entonces, para un periodo dado, el precio óptimo es no creciente con el nivel de inventario de una tienda, siempre que este no sea nulo, es decir:

$$p_t(c_1, c_2) \geq p_t(c_1 + 1, c_2) \quad \forall c_1, c_2 \quad c_1 \neq 0$$

³Tanto la condición como la proposición está expresada en términos del inventario de la tienda 1, y tiene su equivalente para la tienda 2

La condición $B_t(c_1 + 1, c_2) - B_t(c_1, c_2) > B_t(c_1 + 2, c_2) - B_t(c_1 + 1, c_2)$ indica que mientras mayor es el inventario en una tienda menor será el incremento del beneficio provocado por una unidad adicional de producto. Pensando que el beneficio extra provocado por una unidad adicional de producto depende de la probabilidad que existe de vender esa unidad y que mientras mayor es el inventario menor será esa probabilidad, la condición anterior parece bastante razonable.

Por otro lado, la condición $B_t(c_1 + 1, c_2) - B_t(c_1, c_2) > B_t(c_1 + 1, c_2 + 1) - B_t(c_1, c_2 + 1)$ que señala que el beneficio adicional de una unidad extra en alguna tienda es mayor mientras menor es el inventario de la otra se justifica considerando que mientras menor es el inventario de una tienda mayor importancia adquiere la otra tienda desde el punto de vista del beneficio y por tanto incrementar el inventario de esta última tendrá un mayor efecto sobre el beneficio.

Las demostraciones de las proposiciones anteriores se encuentran en el ANEXO II.

2.1.2 Extensión

En el análisis anterior, la tasa de llegada de los clientes a la tienda se mantuvo constante interpretándose el proceso de llegada de los clientes como homogéneo. Este supuesto es posible relajarlo sin perder los resultados obtenidos.

Supóngase que la tasa de llegada de los clientes a la tienda i ($i=1,2$) es una función del tiempo $\lambda_i(t)$. El efecto que este cambio provoca sobre el modelo desarrollado es que para los intervalos de tiempo de precio fijo Δt la probabilidad de vender una unidad ya no será, en general, constante. Por lo tanto, para recuperar una probabilidad constante de venta por periodo se deben escoger los Δt no como intervalos de ancho fijo sino variable.

Lo que se debe hacer entonces es construir una sucesión de intervalos $\{\Delta_k t\}$ de tal forma que al interior de cada uno de ellos la probabilidad de venta de una unidad sea constante para un precio dado.

Sea $\lambda(p)$ la probabilidad deseada de venta de una unidad en cada periodo, entonces los intervalos $\{\Delta_k t\}$ pueden construirse en forma inductiva de acuerdo a la siguiente regla:

$$\lambda_i(p) = \int_{\sum_{j=1}^{k-1} \Delta_j t}^{\sum_{j=1}^k \Delta_j t} \lambda_i(t)(1 - F(p))dt \quad (2.6)$$

La expresión anterior permite calcular $\Delta_k t$ conocido los $k - 1$ intervalos previos; $\lambda_i(p)$ corresponde a la probabilidad de vender una unidad utilizada en el modelo homogéneo.

Una vez corregidos los anchos de los intervalos el modelo de tasa de llegada dependiente del tiempo se convierte en un problema equivalente al desarrollado anteriormente y por tanto su formulación, propiedades y resultados se mantienen.

Chapter 3

ANALISIS DE PROPAGACION DE ERROR

Interesa en este punto estudiar la sensibilidad del modelo de tiempo continuo frente a variaciones en las estimaciones de los parámetros. En particular, se analizará el caso en el cuál la estimación de la función de distribución para el precio de reserva tiene algún grado de incerteza.

Para ello, se caracterizará la variabilidad en la estimación de $F(p)$ asumiendo que el valor verdadero para la función de distribución del precio de reserva ($F_V(p)$) oscila en torno del valor estimado ($F(p)$) de acuerdo a un cierto error porcentual de valor x ($0 < x < 1$). Es decir, se tiene que:

$$F_V(p) \in [F(p) - xF(p); F(p) + xF(p)] \quad \forall p \geq 0 \quad (3.1)$$

Ahora bien, antes de realizar el análisis del modelo, resulta conveniente recordar las expresiones de propagación del error porcentual para las operaciones que intervienen dentro de él, es decir para la suma y el producto.

3.1 RESULTADOS PRELIMINARES

3.1.1 Suma

Sean a y b dos reales medidos con cierta incerteza representada por errores Δa y Δb respectivamente. Entonces, se tiene que el error propagado para $a + b$ viene dado por:

$$\Delta(a + b) = \Delta a + \Delta b \quad (3.2)$$

Luego, el error para la suma corresponde a la suma de los errores de las componentes.

3.1.2 Multiplicación

Con el mismo enunciado anterior, el error propagado para el producto es:

$$\Delta(ab) = b\Delta(a) + a\Delta(b) + \Delta(a)\Delta(b) \quad (3.3)$$

Las demostraciones de (3.2) y (3.3) se encuentran en el ANEXO III(A).

3.2 INVENTARIO MAYOR O IGUAL AL PERIODO

El estudio se realiza para el caso particular de una tienda cuyo inventario disponible c en un período n cualquiera es mayor o igual a n .

En este caso se verifica que el error porcentual en la función de beneficio es constante independiente del periodo. Para ello, basta verificar la siguiente propiedad.

Proposición 3 *Si $n \leq c$ entonces se tiene que $B_n(c) = n B_1(1)$.*

La demostración de (3) se hace por inducción sobre $k = n + c$.

- Para $k = 1$. Como $n \leq c$ se tiene $c = 1$ y $n = 0$ con lo cual la proposición es inmediata.
- Se asume válida la proposición hasta $k - 1$.
- Se demuestra para k .

$$B_n(c) = \max_{p \geq 0} [p\lambda\Delta t(1-F(p)) + B_{n-1}(c-1)\lambda\Delta t(1-F(p)) + B_{n-1}(c)(1-\lambda\Delta t(1-F(p)))]$$

Usando la hipótesis inductiva en la expresión anterior se tiene:

$$B_n(c) = \max_{p \geq 0} [p\lambda\Delta t(1-F(p)) + (n-1) B_1(1)\lambda\Delta t(1-F(p)) + (n-1)(1-\lambda\Delta t(1-F(p)))]$$

es decir,

$$B_n(c) = (n-1) B_1(1) + \max_{p \geq 0} [p\lambda\Delta t(1-F(p))]$$

y como

$$B_1(1) = \max_{p \geq 0} [p\lambda\Delta t(1 - F(p))]$$

se concluye que $B_n(c) = n B_1(1)$. ■

además se cumple que

$$p_n^c = p_1^c \quad \forall c \geq n \quad (3.4)$$

Luego de lo anterior se tiene que el error absoluto en $B_n(c)$ es n veces el error absoluto en $B_1(1)$, como también que el error porcentual de $B_n(c)$ es igual al error porcentual de $B_1(1)$.

Como

$$B_1(c, p) = p\lambda\Delta t(1 - F(p)) \quad (3.5)$$

se tiene que el error porcentual de $B_1(c, p)$ ($x_1(p)$) puede calcularse utilizando las expresiones de propagación del error como:

$$x_1(p) = \frac{F(p)}{1 - F(p)} x \quad (3.6)$$

Si p_1 es el precio que maximiza $B_1(c, p)$, se tiene que:

$$p_1 = \frac{1 - F(p)}{f(p)} \quad (3.7)$$

y por tanto si $x_1 = x_1(p_1)$ se tiene

$$x_1 = \frac{F(p_1)}{p_1 f(p_1)} x \quad (3.8)$$

Por lo tanto, usando (3) se tiene que:

Proposición 4 *Si $n \leq c$ entonces el error porcentual en la función de beneficio provocado por una mala estimación de la distribución del precio de reserva ($F(p)$) es constante e igual a:*

$$x_1 = \frac{F(p_1)}{1 - F(p_1)} x$$

donde x es el error porcentual asociado a la estimación de $F(p)$.

además del resultado anterior es posible observar que $x_1 > x$ si y sólo si $F(p_1) > 0.5$. Por último, de la expresión de $x_1(p)$ es fácil ver que es creciente con el precio.

Ahora corresponde analizar el caso en el cuál el inventario es menor que el período.

3.3 INVENTARIO MENOR QUE EL PERIODO

Para este caso, se estudia un escenario más específico que en el punto anterior y corresponde al caso en que las estimaciones de $F(p)$ subestiman el valor verdadero $F_V(p)$, es decir:

$$F_V(p) \in [F(p); F(p) + xF(p)] \quad \forall p \geq 0 \quad (3.9)$$

La condición (3.9) se traduce en estimaciones para las funciones de beneficio mayores que las realmente observadas y por tanto en este caso las estimaciones generan “pérdidas” pues en promedio se observarán beneficios menores a los calculados.

La conclusión es totalmente distinta en el caso que las estimaciones de $F(p)$ sobreestiman el valor verdadero $F_V(p)$ pues en este caso las estimaciones generan “ganancias” al ser los beneficios estimados menores que los observados ¹.

El siguiente análisis se centra en el caso representado por (3.9) pues corresponde a la situación más riesgosa desde el punto de vista de las estimaciones.

3.3.1 Sobreestimación de los Beneficios

El primer paso es verificar que efectivamente los beneficios se sobreestiman cuando $F_V(p)$ es mayor que $F(p)$.

Sean

- $\Delta F(p) = F_V(p) - F(p)$
- $\Delta B_n(c) = B_n^V(c) - B_n(c)$

donde $B_n^V(c)$ y $B_n(c)$ corresponden al beneficio esperado real y estimado respectivamente en el periodo n si se dispone de un inventario c .

Considerando que $B_n(c)$ puede escribirse como

$$B_n(c) = p_n^c \lambda \Delta t (1 - F(p_n^c)) + B_{n-1}(c-1) \lambda \Delta t (1 - F(p_n^c)) + B_{n-1}(c) (1 - \lambda \Delta t (1 - F(p_n^c))) \quad (3.10)$$

y utilizando las expresiones de propagación de error (3.2) y (3.3) se tiene que:

¹El término “ganancia” se emplea en un sentido informal asociado al hecho que los beneficios que se obtienen superan a los proyectados. Sin embargo, la presencia de incertidumbre en los parámetros siempre significa que los beneficios esperados que se obtienen son menores que los que se obtendrían de no existir incertidumbre y por tanto en términos formales las estimaciones siempre generan “pérdidas”.

$$\begin{aligned}\Delta B_n(c) &= -[p_n^c + B_{n-1}(c-1) - B_{n-1}(c)]\lambda\Delta t\Delta F(p_n^c) + \\ &\quad [\Delta B_{n-1}(c-1) - \Delta B_{n-1}(c)](1 - F_V(p_n^c)) + \Delta B_{n-1}(c)\end{aligned}\quad (3.11)$$

Además de (3.10) se tiene:

$$[p_n^c + B_{n-1}(c-1) - B_{n-1}(c)]\lambda\Delta t = [B_n(c) - B_{n-1}(c)]\frac{1}{1 - F(p_n^c)}\quad (3.12)$$

Con lo cual reemplazando (3.12) en (3.11) y reordenando se tiene:

$$\begin{aligned}\Delta B_n(c) &= -[B_n(c) - B_{n-1}(c)]\frac{\Delta F(p_n^c)}{1 - F(p_n^c)} + \\ &\quad \Delta B_{n-1}(c-1)(1 - F_V(p_n^c)) + \\ &\quad \Delta B_{n-1}(c)(F_V(p_n^c))\end{aligned}\quad (3.13)$$

El supuesto es que $\Delta F(p) > 0$ y a partir de él se verificará que $\Delta B_n(c) \leq 0 \forall n, \forall c > 0$. En forma inductiva sobre $k = n + c$ se tiene que:

- Para $k = 1$ es decir $n = 1$ y $c = 1$ usando (3.5) se tiene

$$\Delta B_1(1) = -\lambda\Delta t\Delta F(p_1^1) < 0$$

- Suponiendo válido el resultado hasta $k - 1$.
- Se demuestra para k .

A partir de (3.13), recordando que $B_n(c) \geq B_{n-1}(c)$ y utilizando las hipótesis inductivas sobre $\Delta B_{n-1}(c-1)$ y $\Delta B_{n-1}(c)$ es fácil ver que el primer sumando que conforma $\Delta B_n(c)$ es negativo. Los dos sumandos restantes son negativos pues $\Delta B_{n-1}(c-1)$ y $\Delta B_{n-1}(c)$ son negativos y claramente $1 - F_V(p_n^c) \geq 0$ y $F_V(p_n^c) \geq 0$. De esta forma, todos los términos que se suman en (3.13) son negativos concluyéndose que $\Delta B_n(c) \leq 0$. ■

Intuitivamente, el resultado anterior puede entenderse al observar que si $\Delta F(p) > 0$ entonces $[1 - F_V(p)] - [1 - F(p)] = -\Delta F(p) < 0$ luego $[1 - F_V(p)]$ es menor que $[1 - F(p)]$. Es decir, la fracción real de clientes que compran el producto $(1 - F_V(p))$ es menor que la fracción considerada en las estimaciones $(1 - F(p))$, por lo tanto en el modelo con estimaciones se visualiza a los clientes como más interesado por el producto de lo que realmente están y por tanto se esperan beneficios mayores a los que realmente se obtendrán.

3.3.2 Cotas para el Error Porcentual de los Beneficios

Interesa en este punto determinar el comportamiento del error porcentual de las funciones de beneficio a medida que aumentan los periodos de venta para diferentes niveles de inventario. Para ello, se utilizará un resultado previo bastante intuitivo.

Proposición 5 *Mientras mayor es la disponibilidad a pagar por parte de los clientes mayor beneficio adicional provoca una unidad extra de inventario.*

$$B_n^V(c) - B_n^V(c-1) \leq B_n(c) - B_n(c-1)$$

La demostración de la proposición anterior se encuentra en el ANEXO III(B1).

A partir de la proposición (5) es posible mostrar que el valor absoluto del error porcentual de $B_n(c)$ es acotado superiormente por:

$$-\frac{\Delta B_n(c)}{B_n(c)} \leq x_1(p_n^c) = \frac{F(p_n^c)}{1 - F(p_n^c)} x \quad (3.14)$$

donde $x_1(p_n^c)$ definido en la sección anterior representa el error porcentual de $B_1(c)$ si el precio cobrado es p_n^c . La demostración de (3.14) se encuentra en el ANEXO III(B2).

Como $x_1(p)$ es creciente en p es decir, mientras mayor el precio p_n^c mayor es la cota superior para el error porcentual de $B_n(c)$. Por lo tanto, como p_n^c aumenta con n y disminuye con c , mientras mayor número de periodos se disponga para la venta de producto mayor es la cota del error y mientras mayor es el número de unidades a vender menor es la cota para el error porcentual. Es destacable que para $c \geq n$ la cota que entrega (3.14) coincide con el valor real del error calculado en la sección anterior. En efecto, si $c \geq n$ por (3.4) $p_n^c = p_1$ con lo cual $x_1(p_n^c) = x_1(p_1)$ que es la conclusión que se obtuvo en el caso anterior.

3.4 CASO GENERAL

A partir de los resultados obtenidos en las dos secciones anteriores es posible expresar la cota superior del error porcentual de $B_n(c)$ mediante un resultado único.

Proposición 6 *Si la función de distribución del precio de reserva utilizada en el calculo de $B_n(c)$ ($F(p)$) subestima el valor verdadero de esta ($F^V(p)$) de tal forma que*

$$F^V(p) \in [F(p); F(p) + xF(p)] \quad \forall p \geq 0$$

entonces los beneficios esperados estimados sobreestimarán los verdaderos y el error porcentual de $B_n(c)$ estará acotado superiormente por:

$$\frac{F(p_n^c)}{1 - F(p_n^c)}x$$

donde p_n^c es el precio óptimo a cobrar en el periodo n si el inventario disponible es c y la función de distribución para el precio de reserva utilizada es $F(p)$. Además, la cota anterior será activa en los casos que $c \geq n$.

Chapter 4

MODELO DE REVISIONES PERIODICAS

En los capítulos anteriores, y por razones teóricas, se asumió que el precio podía ser modificado en cualquier instante del periodo de venta. En la práctica, no existen tantas libertades; el precio es modificado un número reducido y muchas veces predeterminado de veces durante el ciclo de venta. Es por ello, que en este capítulo se desarrolla un modelo que permite incorporar estas restricciones. Inicialmente se estudia el caso de una tienda para luego extenderlo al caso de dos tiendas.

4.1 SUPUESTOS

Para facilitar el manejo matemático de los modelos aquí desarrollados se caracteriza las funciones de demanda en base a un conjunto de supuestos.

1. Las funciones de distribución ($F(p)$) y densidad ($f(p)$) de probabilidad para el precio de reserva son continuas y diferenciables.
2. Si $p \rightarrow \infty$ entonces $pf(p) \rightarrow 0$.
3. Las funciones de beneficio para el modelo de una tienda admiten un único máximo local en el nivel de precio.

La primera condición permite asegurar las técnicas de derivación como herramientas de caracterización de puntos extremos, entre otras cosas. La segunda condición garantiza la existencia de un precio de reserva promedio, junto con asegurar la tendencia a 0 del beneficio si p tiende a infinito. Por último, la tercera condición permite asegurar que las condiciones de primer orden en la maximización de los beneficios caracterizan los valores óptimos.

4.2 MODELO DE UNA TIENDA

La formulación del modelo de *revisiones periódicas* es muy similar al caso continuo, sólo que en este caso la probabilidad de vender 2 o más unidades en un periodo de precio fijo ya no es despreciable.

Sean T_1, T_2, \dots, T_k las duraciones de los k periodos de precio fijo, es decir, el precio es revisado al comienzo de cada periodo y permanece constantes hasta el final de este. Es claro que se satisface $\sum_{i=0}^k (T_i) = H$, duración del horizonte de venta, la función de beneficio recursiva $V_i(c, p)$ ($i = 1, \dots, k$) representa el beneficio esperado si al comienzo del periodo i se dispone de un inventario c y se cobra un precio p por el producto, es decir:

$$V_i(c, p) = E[p \cdot \min(c; D_i(p)) + V_{i-1}(\max(c - D_i(p); 0))] \quad (4.1)$$

donde E representa el operador valor esperado, $D_i(p)$ la demanda del i -ésimo periodo con un precio de p y $V_i(c) = \max_{p \geq 0} V_i(c; p)$. Dados los supuestos que se han establecido para la demanda, $D_i(p)$ tiene una distribución Poisson de parámetro $\lambda_i(p) = \lambda T_i(1 - F(p))$, por lo tanto

$$\begin{aligned} V_i(c, p) &= \sum_{k=0}^{\infty} [\min(c; k)p + V_{i-1}(\max(c - k; 0))] \frac{(\lambda_i(p))^k e^{-\lambda_i(p)}}{k!} \\ &= p \cdot \left[\sum_{k=0}^c k \text{Prob}(D_i(p) = k) + c \sum_{k=c+1}^{\infty} \text{Prob}(D_i(p) = k) \right] \\ &= p \cdot \left[c - \sum_{k=0}^c (c - k) \cdot \text{Prob}(D_i(p) = k) \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

Interesa estudiar para este modelo el comportamiento del precio óptimo de un periodo cualquiera en función del inventario, como también la evolución del precio óptimo a través del tiempo.

Un resultado bastante intuitivo es que mientras más inventario se disponga mayor será el beneficio esperado.

Proposición 7 *La función de beneficio $V_i(c)$ es creciente con c .*

$$V_i(c + 1) \geq V_i(c)$$

Para demostrar la proposición anterior basta utilizar un razonamiento inductivo. En efecto, claramente $V_i(1) \geq V_i(0) = 0$, luego si se acepta que $V_i(k) \geq V_i(k - 1)$ es fácil ver que:

$$\begin{aligned}
V_i(c+1) &= \max_{p \geq 0} [p(c+1 - \sum_{k=0}^{c+1} (c+1-k) \text{Prob}(D_i(p) = k)) \\
&\quad + \sum_{k=0}^c V_{i-1}(c-k) \text{Prob}(D_i(p) = k)] \\
&= \max_{p \geq 0} [p(c - \sum_{k=0}^c [(c-k) \text{Prob}(D_i(p) = k)] + 1 - \sum_{k=0}^c \text{Prob}(D_i(p) = k)) \\
&\quad + \sum_{k=0}^c V_{i-1}(c+1-k) \text{Prob}(D_i(p) = k)] \\
&\geq \max_{p \geq 0} [p(c - \sum_{k=0}^c (c-k) \text{Prob}(D_i(p) = k)) + \sum_{k=0}^c V_{i-1}(c-k) \text{Prob}(D_i(p) = k)] \\
&= V_i(c)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

■

Para realizar el estudio de este primer modelo se descompondrá el problema en dos escenarios. El primero y más simplificado corresponde a suponer que existe un sólo periodo o equivalentemente que el precio no puede modificarse durante el ciclo de venta.

En el segundo caso se asume que el precio sólo puede modificarse una vez y corresponde al de dos periodos.

4.2.1 Modelo de Precio Constante

En este caso se cumple que $T_1 = H$ y la función de beneficio esperado es:

$$V_1(c, p) = pE[D_1(p)] \tag{4.4}$$

$$V_1(c, p) = p \sum_{k=0}^c [k \frac{(\lambda_1(p))^k e^{-\lambda_1(p)}}{k!}] \tag{4.5}$$

En este caso, como sólo existe un periodo, no se puede analizar el comportamiento del precio óptimo a través del tiempo, por lo que se estudia el comportamiento de esta variable con el inventario y con la duración del periodo (T_1).

Proposición 8 *El precio óptimo asociado a un modelo de un periodo es decreciente con el inventario, es decir:*

$$p_1(c) \geq p_1(c+1) \quad \forall c \in \mathbb{N}$$

La demostración de la proposición anterior se encuentra en el ANEXO IV(A).

A partir del resultado anterior es posible mostrar que el precio óptimo es acotado.

Proposición 9 *Para todo nivel de inventario c y para una duración del periodo de venta $T_1 \geq 0$ el precio óptimo p_1^c está acotado, inferiormente por p_{min} , y superiormente por p_{max} soluciones de las ecuaciones:*

$$p_{min} = \frac{1 - F(p_{min})}{f(p_{min})}$$

$$p_{max} = \frac{e^{\lambda T_1(1-F(p_{max}))} - 1}{\lambda T_1 f(p_{max})}$$

La demostración de esta proposición se encuentra en el ANEXO IV(B). La cota mínima para el precio expuesta en la condición anterior es independiente de la tasa de llegada (λ) como también de la duración del periodo de venta (T_1).

El resultado anterior junto con el comportamiento del beneficio con el inventario permiten asegurar que la función de beneficio es acotada para una duración T_1 fija. En efecto, se tiene que:

Proposición 10 *Si $V_1(c, T_1)$ representa el máximo beneficio esperado para el modelo de un periodo de duración T_1 entonces se cumple que:*

$$0 \leq V_1(c, T_1) \leq V_1^{max}(T_1)$$

con

$$V_1^{max}(T_1) = \lim_{c \rightarrow \infty} V_1(c, T_1) = \lambda T_1 p_{min}^2 f(p_{min})$$

La demostración de la proposición anterior es directa al pensar que la función de beneficio esperado es creciente con c por lo tanto el valor máximo del beneficio esperado se calcula tomando el límite cuando c tiende a infinito. Además, el precio óptimo a cobrar es decreciente con c y tiende a p_{min} . Por último, el número de unidades vendidas es igual a $\lambda_1(p_{min})$ si $c \rightarrow \infty$. Combinando estos resultados la proposición anterior se obtiene inmediatamente.

Ahora bien, como p_{min} es independiente de T_1 , la cota superior del beneficio $V_1^{max}(T_1)$ crece indefinidamente con T_1 siendo entonces el beneficio no acotado con respecto a la duración del periodo de venta. Este resultado no debe sorprender si se considera que el modelo desarrollado no incluye ninguna tasa de descuento para los ingresos.

Por otro lado, el precio óptimo resulta ser creciente con respecto a la duración del periodo T_1 . Mientras más tiempo se tenga para vender los productos mayor será el número de clientes con alta disposición que visitan la tienda y por tanto precios más altos permiten aumentar el beneficio.

Proposición 11 *Si $p_1^c(T_1)$ representa el precio óptimo cuando el inventario inicial es c y la duración del periodo de venta es T_1 entonces se cumple que:*

$$p_1^c(T_1) \geq p_1^c(T'_1) \quad T_1 \geq T'_1$$

La demostración se encuentra en el ANEXO IV(C).

A partir de la proposición (9) el precio óptimo es acotado inferiormente independiente de la duración T_1 del periodo de venta. Sin embargo, es posible mostrar que el precio óptimo crece de manera no acotada cuando la duración del periodo T_1 crece en forma no acotada, es decir:

Proposición 12 *Si $p_1^c(T_1)$ representa el precio óptimo cuando el inventario inicial es c y la duración del periodo de venta es T_1 entonces se cumple que:*

$$\lim_{T_1 \rightarrow \infty} p_1^c(T_1) \rightarrow \infty$$

La demostración se encuentra en el ANEXO IV(D).

Este resultado es consecuencia de asumir que para cualquier nivel de precio siempre existen consumidores dispuestos a pagarlo. En la práctica esto no parece ser así, el precio de reserva tiene un cota superior y por tanto la proposición anterior debería reescribirse en estos casos señalando que el precio tiende al mayor precio de reserva cuando la duración del periodo de venta crece indefinidamente.

Hemos visto que la función de beneficio es creciente con el nivel de inventario lo que en principio es bastante razonable, un resultado menos intuitivo tiene relación con el comportamiento marginal de cada unidad extra de beneficio.

Proposición 13 *La función de beneficio es "concava" en el nivel de inventario.*

$$V_1(c) - V_1(c - 1) \geq V_1(c + 1) - V_1(c)$$

La demostración de esta propiedad se encuentra en el ANEXO IV(E).

El resultado anterior es consecuente con el hecho que exista una cota superior para el beneficio. Además, como este modelo no incluye el costo de compra o producción de los productos, la proposición anterior asegura la existencia de un nivel óptimo de inventario a comprar.

En esta sección se han presentados diferentes resultados en relación al modelo de precio constante para una tienda. En ellos se presenta el comportamiento óptimo del precio en relación al inventario y la duración del periodo de venta, además en los casos en que existen se han determinado cotas máximas y mínimas para el precio. A continuación se presenta una aplicación de los resultados anteriores al caso de una distribución particular para el precio de reserva.

Caso Particular

A modo de ejemplo, consideremos el caso particular para el cual la distribución del precio de reserva sigue una distribución de *Weibull* de parámetros α y β , es decir:

$$f(p) = \alpha\beta p^{\beta-1} e^{-\alpha p^\beta} \quad \forall p \geq 0 \quad (4.6)$$

$$F(p) = 1 - e^{-\alpha p^\beta} \quad \forall p \geq 0 \quad (4.7)$$

Modelar el precio de reserva de acuerdo a una distribución *Weibull* tiene no sólo ventajas de simplicidad en el manejo algebraico también resulta comoda para modelar pues la flexibilidad que le confieren los dos grados de libertad que posee (α y β) le permiten ajustarse bien a los distintos tipos de comportamiento que puede presentar el precio de reserva. Por ejemplo, el parámetro β permite regular la sensibilidad de la probabilidad de compra con el precio, un valor alto de β significa que la demanda es altamente sensible al precio.

Utilizando las expresiones anteriores de la función de densidad y la de distribución es posible encontrar el comportamiento de los precios mínimos y máximos determinados en la proposición (9).

Para el precio mínimo (p_{min}) se debe resolver:

$$p_{min} = \frac{1 - F(p)}{f(p)} \quad (4.8)$$

que en este caso equivale a

$$p_{min} = \frac{1}{\sqrt[\beta]{\alpha\beta}} \quad (4.9)$$

Para el precio máximo (p_{max}) se debe resolver

$$p_{max} = \frac{\exp^{\lambda T_1(1-F(p_{max}))} - 1}{\lambda T_1 f(p_{max})} \quad (4.10)$$

La solución de (4.10), p_{max} , debe satisfacer:

$$\begin{aligned} p_{max} &= \sqrt[\beta]{\frac{e^k - 1}{\alpha\beta k}} \quad \text{con} \\ k &= \lambda T_1 e^{-\alpha p_{max}^\beta} \end{aligned} \quad (4.11)$$

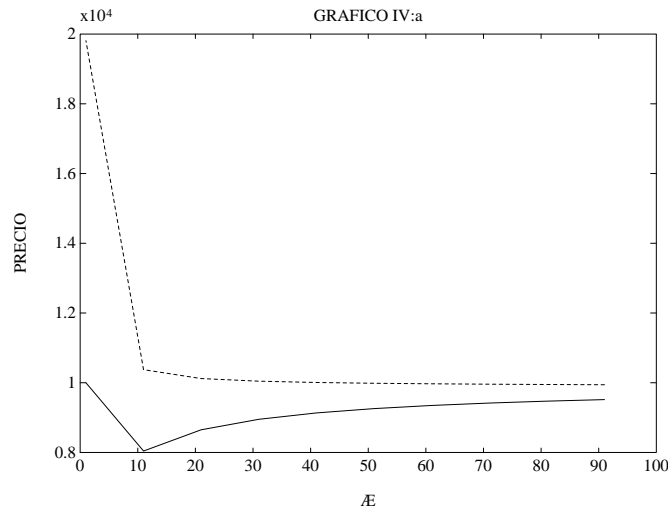
es decir,

$$p_{max} = p_{min} \sqrt[\beta]{\frac{e^k - 1}{k}} \quad (4.12)$$

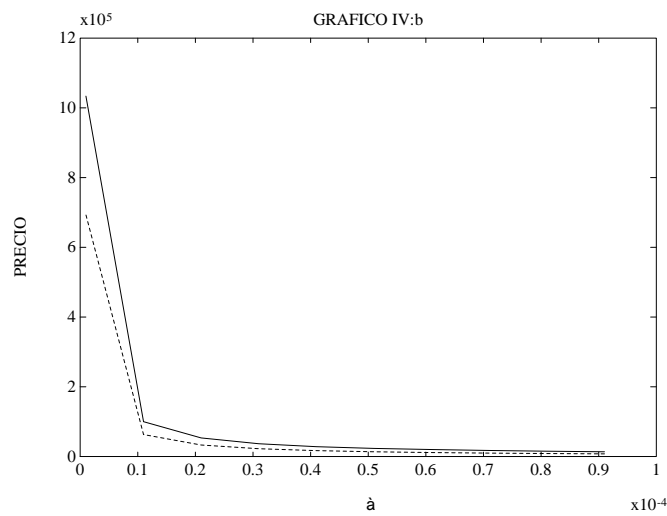
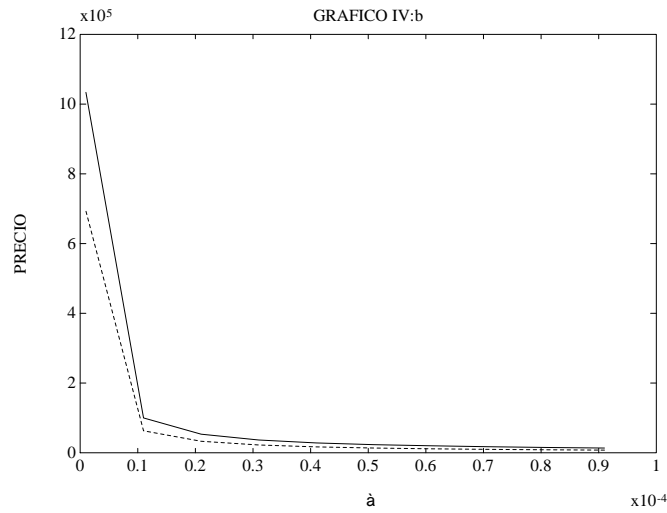
además, $\frac{e^k - 1}{k}$ es creciente con k y k es acotado superiormente por λT_1 , por lo tanto se tiene:

$$p_{max} \leq \sqrt[\beta]{\frac{e^{\lambda T_1} - 1}{\alpha\beta\lambda T_1}} \quad (4.13)$$

La figura IV:a muestra el comportamiento de los precios mínimos y máximos en función de β .



La figura IV:b muestra el comportamiento de los precios mínimos y máximos en función de α .



A partir de los valores para p_{max} y p_{min} es posible determinar los valores de V_1^{max} y V_1^{min} en este caso particular.

Es así como V_1^{max} corresponde a:

$$V_1^{max} = \frac{\lambda T_1}{\sqrt[\beta]{\alpha \beta e}} \quad (4.14)$$

De la ecuación anterior se deduce que si β es muy grande, es decir, que la disponibilidad a pagar por parte de los cliente es muy sensible al precio, el beneficio esperado máximo tiende a comportarse como λT_1 .

Por su parte V_1^{min} se calcula como:

$$V_1^{min} = \lambda T_1 p_{max}^2 \frac{f(p_{max})}{e^k} \quad (4.15)$$

A continuación se extiende el modelo de un periodo al caso en que el periodo de venta es dividido en dos subperiodos de precio fijo.

4.2.2 Modelo de Dos Periodos

Consideremos el caso en el cual el periodo total de venta de duración H es dividido en dos subperiodos de duración T_1 y T_2 ($T_1 + T_2 = H$), y tal que durante cada uno de estos subperiodos el precio es mantenido constante. Si $V_2(c, p)$ representa el beneficio esperado al comienzo del periodo de venta si se dispone de un inventario c y se cobra un precio p . Utilizando (4.2) se tiene que:

$$V_2(c, p) = \sum_{k=0}^{\infty} [\min(c; k)p + V_1(\max(c - k; 0))] \frac{(\lambda_2(p))^k e^{-\lambda_2(p)}}{k!} \quad (4.16)$$

donde $\lambda_2(p) = \lambda T_2(1 - F(p))$ corresponde a la tasa de venta en el periodo 2 cuando el precio es p .

Un primer resultado intuitivo es que el beneficio esperado máximo en el caso de dos subperiodos es mayor que el máximo beneficio esperado en el caso de un sólo periodo para horizontes de venta iguales. Esto es claro pues en el caso de un único periodo el precio debe elegirse al comienzo sin poder modificarse posteriormente. En cambio en el caso de dos subperiodos existe mayor libertad en la fijación de precio al existir la posibilidad de modificar el precio inicial durante el ciclo de venta.

Proposición 14 *El máximo beneficio esperado para el modelo de un periodo ($V_1(c)$) es menor que el máximo beneficio esperado para el modelo de dos subperiodos ($V_2(c)$) para horizontes de venta iguales.*

$$V_2(c) \geq V_1(c) \quad \forall c \geq 0$$

La demostración se encuentra en el ANEXO IV(F).

Otro punto de interés de este modelo y sobre todo desde la perspectiva de los consumidores es el comportamiento del precio. Si existen dos periodos para fijar el precio en principio es razonable pensar que el precio inicial que se cobra es mayor que aquel que se cobraría si el precio no puede modificarse durante el periodo de venta. Se cobra un precio mayor con objeto de capturar mejor el excedente de los consumidores con “alta” disponibilidad a pagar durante el periodo inicial.

Antes de formalizar lo anterior conviene reescribir la función de beneficio de este modelo de dos periodos. Sea H la duración del periodo de venta, y sean T_1 y T_2 las duraciones de los subperiodos de precio fijo, para mantener la notación asociada a la formulación dinámica

del modelo consideremos que T_2 representa la duración del periodo inicial y T_1 la del periodo final. Si $V_1(c, p, T)$ representa el beneficio esperado durante un periodo de duración T con inventario inicial c y si se cobra un precio p y $V_1(c, T) = \max_{p \geq 0} V_1(c, p, T)$ entonces el beneficio esperado para el modelo de dos subperiodos $V_2(c, p, H)$ o simplemente $V_2(c, p)$ puede escribirse como:

$$V_2(c, p) = V_1(c, p, T_2) + \sum_{k=0}^c V_1(c - k, T_1) Prob(D_2(p) = k) \quad (4.17)$$

además el beneficio para el modelo sin cambio de precio puede escribirse:

$$V_1(c, p) = V_1(c, p, T_2) + \sum_{k=0}^c V_1(c - k, p, T_1) Prob(D_2(p) = k) \quad (4.18)$$

Proposición 15 *Si $p_2(c)$ es el precio óptimo de (4.17) y $p_1(c)$ es el precio óptimo de (4.18) entonces se cumple que:*

$$p_2(c) \geq p_1(c) \quad \forall c \geq 0$$

La demostración de la proposición anterior se encuentra en el ANEXO IV(G)

La proposición anterior establece que el precio aumenta al existir la posibilidad de modificarlo a través del tiempo. Otro punto de interés es el comportamiento del precio del periodo inicial $p_2(c)$ con el inventario. En esta situación sucede algo similar al caso de un sólo periodo, mientras más inventario se tenga inicialmente menor será el precio cobrado. Esto se debe nuevamente al hecho que pasado el periodo de venta el producto pierde todo su valor y por tanto los aumentos de inventarios inducen la necesidad de vender un volumen mayor y por tanto a disminuir el precio.

Proposición 16 *Si $p_2(c)$ representa al precio óptimo a cobrar en el periodo inicial para el modelo de dos subperiodos con un inventario inicial de c , entonces se cumple que:*

$$p_2(c) \geq p_2(c + 1) \quad \forall c \geq 0$$

La demostración se encuentra en el ANEXO IV(H).

A partir del resultado anterior es posible entonces buscar cuales son las cotas superiores e inferiores para el precio óptimo del periodo inicial.

Como el precio es decreciente con el inventario entonces el precio mínimo p_2^{min} se determina buscando el precio óptimo de $\lim_{c \rightarrow \infty} V_2(c, p)$. El precio máximo, p_2^{max} , en cambio se determina como el precio óptimo de $V_2(1, p)$.

Proposición 17

$$p_2^{min} = \frac{1 - F(p_2^{min})}{f(p_2^{min})}$$

$$p_2^{max} = V_1(1, T_1) + \frac{e^{\lambda T_2(1 - F(p_2^{max}))} - 1}{\lambda T_2 f(p_2^{max})}$$

La demostración se encuentra en el ANEXO IV(I).

De la proposición anterior se puede ver que el precio mínimo del modelo de dos subperiodos coincide con el precio mínimo del modelo de un sólo periodo, $p_2^{min} = p_1^{min}$. En tanto, no es difícil ver que para el precio máximo se satisface $p_1^{max} \leq p_2^{max} \leq V_1(1, T_1)$.

4.3 MODELO DE DOS TIENDAS

Para concluir este capítulo se discutirá en esta sección el modelo de dos tiendas. El modelo en cuestión considera dos tiendas que venden el mismo producto a un mismo precio y que en principio atienden a consumidores distintos en términos de sus disponibilidades a pagar y su tasa de llegada a las tiendas. Sean $F_1(p), \lambda_1$ y $F_2(p), \lambda_2$ las funciones de distribución para el precio de reserva y las tasas de llegada en las tiendas 1 y 2 respectivamente.

Consideremos el caso en que el precio permanece fijo durante todo el periodo de venta. Sea $VV_1(c_1, c_2, p)$ el beneficio esperado conjunto de las dos tiendas si los inventarios iniciales son c_1 y c_2 para la tiendas 1 y 2 respectivamente y si el precio cobrado es p . Si además $V_1^i(c_i, p)$ corresponde al beneficio esperado de la tienda i con inventario inicial c_i y precio p , se tiene que:

$$VV_1(c_1, c_2, p) = V_1^1(c_1, p) + V_1^2(c_2, p) \quad (4.19)$$

A partir de la relación anterior y considerando que $V_1^i(c_i, p)$ es una función seudoconcava en el precio ($i = 1, 2$) es fácil ver que el precio óptimo para $VV_1(c_1, c_2, p)$, es decir $p(c_1, c_2)$

está contenido entre el mínimo y el máximo de los precios óptimos de $V_1^1(c_1, p)$ y $V_1^2(c_2, p)$ ($p_1(c_1)$ y $p_2(c_2)$).

Proposición 18

$$\min_i \{p_i(c_i)\} \leq p(c_1, c_2) \leq \max_i \{p_i(c_i)\}$$

La demostración de la proposición es directa. En efecto si $p(c_1, c_2)$ es menor que $\min_i \{p_i(c_i)\}$ entonces aumentos de $p(c_1, c_2)$ significan incrementar $V_1^i(c_i, p)$ ($i = 1, 2$) y por tanto $VV_1(c_1, c_2, p)$. El razonamiento es idéntico para la cota superior con la diferencia que en este caso las disminuciones del precio incrementan el beneficio agregado.

La condición anterior establece entonces que el precio óptimo para las dos tiendas en conjunto es una combinación convexa de los precios óptimos de cada una de ellas por separado. Por lo tanto, es posible postular la existencia de una función $\theta(c_1, c_2)$ tal que $\forall c_1, c_2 \quad 0 \leq \theta(c_1, c_2) \leq 1$ y:

$$p(c_1, c_2) = \theta(c_1, c_2)p_1(c_1) + (1 - \theta(c_1, c_2))p_2(c_2) \quad (4.20)$$

De lo anterior se tiene entonces que el comportamiento del precio óptimo para el modelo de dos tiendas puede describirse mediante el comportamiento de los precios óptimos de las tiendas por separado y de la función $\theta(c_1, c_2)$.

Un primer resultado para $\theta(c_1, c_2)$ tiene relación con su comportamiento con el nivel de inventario. Es esperable que $\theta(c_1, c_2)$ sea creciente con c_1 y decreciente con c_2 , es decir, mientras mayor el inventario de la tienda 1 mayor será su importancia relativa en la selección del precio óptimo para la dos tiendas en conjunto.

Proposición 19

$$\frac{\partial}{\partial c_1} \theta(c_1, c_2) \geq 0$$

$$\frac{\partial}{\partial c_2} \theta(c_1, c_2) \leq 0$$

La demostración de la proposición anterior se encuentra en el ANEXO IV(J).

Cabe preguntarse ahora cómo se modifica el precio frente a aumentos en el nivel de inventario de alguna de las dos tiendas. El resultado anterior permite en parte responder esta pregunta. Supongamos que los niveles de inventario son c_1 y c_2 en las tiendas 1 y 2, consideremos además que $p_1(c_1) = \min_i [p_i(c_i)]$. Supongamos que el nivel de inventario c_1 se aumenta a $c_1 + 1$. En el capítulo anterior se probó que $p_1(c_1) \geq p_1(c_1 + 1)$, además de la proposición anterior se tiene que $\theta(c_1 + 1, c_2) \geq \theta(c_1, c_2)$, es decir, al momento de calcular $p(c_1 + 1, c_2)$ usando (4.20) se le asigna un ponderador relativo mayor a un precio que es menor de lo cual necesariamente se tendrá que $p(c_1 + 1, c_2) \leq p(c_1, c_2)$. Sin embargo, si es c_2 el inventario que se aumenta el resultado anterior no necesariamente se cumplirá. Lo que sucede en este caso es que si bien se disminuye el precio $p_2(c_2) = \max_i [p_i(c_i)]$ se le asigna un ponderador relativo $1 - \theta(c_1, c_2 + 1)$ mayor y por tanto el resultado es incierto. A modo de ejemplo, consideremos un caso extremo en que $c_1 \gg c_2$ y que además los clientes de la tienda 2 tienen una disposición a pagar mucho mayor que los de la tienda 1. Al ser el inventario de la tienda 1 muy grande respecto de la tienda 2 es razonable pensar que el precio óptimo a cobrar en las tiendas en conjunto tiende a regularse sólo a través del precio óptimo de la tienda 1. Sin embargo, si el inventario de la tienda 2 comienza a incrementarse las dos tiendas empezarán a tener iguales pesos relativos en la fijación de precio y como los clientes de la tienda 2 están dispuestos a pagar mucho más por el bien el precio óptimo del conjunto tenderá a aumentar.

El ejemplo extremo anterior permite ilustrar la incertidumbre en el comportamiento del precio óptimo frente a variaciones en alguno de los inventarios. Ahora bien, la situación descrita en el ejemplo en la cual es posible observar crecimiento en el nivel de precios frente a aumentos en algún nivel inventario se sustenta en un comportamiento poco racional en la distribución del inventario total $c_1 + c_2$ entre las dos tiendas. Lo razonable es distribuir más producto a aquella tienda que enfrenta consumidores con mayor disponibilidad a pagar por el producto. A partir de este hecho se reestructurará el modelo de dos tiendas pero incorporando la condición que el inventario inicial total es dividido entre las dos tiendas de acuerdo a un criterio maximizador del beneficio esperado.

4.3.1 Modelo de Dos Tiendas con División Eficiente del Inventario

Sea I el nivel de inventario inicial total que dispone la empresa para vender en sus dos tiendas. Bajo este marco, el problema para el conjunto de tiendas ya no es sólo decidir cual

es el precio óptimo a cobrar sino también decidir como dividir el inventario total I entre sus tiendas. El problema a resolver puede entonces plantearse como:

$$\max_{p \geq 0, c_1, c_2} [VV_1(c_1, c_2, p)] \quad (4.21)$$

s.a

$$I = c_1 + c_2$$

$$c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$$

Al resolver el problema anterior se obtiene como condición para la distribución del inventario que dado el precio óptimo el ingreso marginal asociado a una unidad extra en la tienda 1 debe ser igual al ingreso marginal asociado a una unidad extra en la tienda 2, que para este modelo es equivalente a:

$$Prob(D_1(p) \leq c_1) = Prob(D_2(p) \leq c_2) \quad (4.22)$$

La demostración se encuentra en el ANEXO IV(K).

La igualdad anterior es difícilmente alcanzable para niveles de inventario discreto. Lo que se debe buscar son c_1 y c_2 ($c_1 + c_2 = I$) que igualen lo más posible los términos de la ecuación anterior. La condición anterior permite ver que los aumentos de I se comparten entre las dos tiendas.

Chapter 5

APLICACION

En este capítulo se desarrolla una aplicación práctica de los modelos y resultados encontrados en los capítulos anteriores en una importante tienda por departamentos chilena, como es FALABELLA. El principal objetivo que se persigue con esto, es comparar los resultados entregados por los modelos desarrollados a la luz de lo observado en la realidad.

Antes de entrar en los detalles de la implementación de esta aplicación resulta conveniente describir brevemente las características de operación que presenta FALABELLA las que la hacen atractiva desde el punto de vista de este trabajo. FALABELLA cuenta en la actualidad con 8 tiendas, 5 en Santiago y 3 en provincias, en las cuales se venden prácticamente los mismos productos. FALABELLA tiene como política cobrar los mismos precios en sus 8 tiendas. El año calendario se divide en dos temporadas semestrales; temporadas “Otoño-Invierno” y “Primavera-Verano”. Muchos de los productos que se venden durante una temporada no son vendidos en la siguiente, por ejemplo, trajes de baños o abrigos. Por ello, la empresa se pone la meta de vender todo el stock de este tipo de productos durante la temporada correspondiente.

De acuerdo a las características de operación descritas, FALABELLA presenta las condiciones necesarias para la aplicación de los modelos desarrollados en este trabajo, estas son (i): vender productos con un horizonte de venta definido (“pericibles”) y (ii): fijar los mismos precios para las distintas tiendas.

Las etapas desarrolladas en esta aplicación práctica son las siguientes:

- Recolección de datos de ventas e inventario para distintos productos que son vendidos durante una temporada.
- Validación del supuesto de llegadas poissonianas de los clientes a las tiendas.

- Determinación de la función de distribución para el precio de reserva de los clientes en las distintas tiendas.
- Implementación de los modelos desarrollados determinando la función de beneficio esperado.
- Comparación de los resultados entregados por el modelo con respecto a una política alternativa de fijación de precio mediante simulación.

5.1 RECOLECCION DE DATOS

La información que se obtuvo para desarrollar esta aplicación corresponde a secuencias de ventas, precios, inventarios iniciales y costos unitarios de compra para un conjunto de productos que son vendidos solamente en la temporada “Otoño-Invierno” en las 8 tiendas de FALABELLA. Los productos observados son principalmente camisones y batas de dormir.

La siguiente tabla contiene el conjunto de datos recopilados para un producto en particular. En ella se muestra el nivel de venta por tienda para los distintos periodos y su respectivo precio cobrado.

Tienda	97 Días \$ 11450	7 Días \$ 7890	8 Días \$ 7890	14 Días \$ 7890	6 Días \$ 7890
CENT.	177	21	28	92	17
P.A.	87	17	14	43	21
P.V.	96	18	17	50	17
PROV	52	11	10	21	16
A.C.	71	7	6	12	11
V.M.	68	16	27	24	23
RANC	18	4	9	17	7
CAL.	8	4	1	2	0

TABLA 5:1

5.2 VALIDACION DEL SUPUESTO DE LAS LLEGADAS DE LOS CLIENTES

Una de las características importantes del modelo es la de asumir que los clientes de cada tienda llegan de acuerdo a un proceso de Poisson. Para realizar la validación de este supuesto conviene aclarar ciertos puntos importantes.

De acuerdo al modelo, los datos que han sido recopilados corresponden a observaciones de un proceso Poisson de parámetro $\lambda(p) = \lambda T(1 - F(p))$, es decir con un parámetro dependiente

del precio. Ahora bien, para validar el comportamiento poissoniano es deseable tener datos que correspondan a un proceso Poisson de tasa constante. Por lo tanto, las observaciones deben agruparse de tal forma que al interior de cada grupo los datos corresponda a un proceso de Poisson de tasa constante. Como $F(p)$ varía entre tiendas y entre productos distintos, la primera división de los datos obliga a agruparlos por tiendas y por productos. Además, como $F(p)$ es función del precio los datos deben también agruparse de acuerdo al nivel de precio.

De esta forma, para cada producto se considerará las observaciones de sus ventas para una tienda particular y para un nivel de precio fijo. A partir de estas observaciones se validará entonces el supuesto que las ventas siguen un proceso de Poisson de tasa $\lambda(1 - F(p))$ donde p es fijo y en principio la función $F(p)$ es constante en el tiempo.

5.2.1 Aspectos Metodológicos

Supongamos que x_1, x_2, \dots, x_n son observaciones de un proceso de Poisson de tasa λ obtenidas durante intervalos de tiempos T_1, T_2, \dots, T_n . El estimador máximo verosimil de λ , es decir, $\hat{\lambda}$ viene dado por la expresión:

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{\sum_{k=1}^n T_k} \quad (5.1)$$

Entonces para cada producto i , para cada tienda j y para un nivel de precio fijo p es posible calcular la tasa de compra $\lambda_{ij}(p)$ de acuerdo a la expresión (5.1). La elección del método de máxima verosimilitud para determinar las tasas de compra se debe básicamente a sus propiedades de insesgamiento y suficiencia.

Por ejemplo, para el producto descrito en la tabla 5.1 los valores que se obtienen para las tasas de compra en función del precio son:

Tienda	\$ 11450	\$ 7890
CENT.	1.824	4.514
P.A.	0.897	2.714
P.V.	0.990	2.914
PROV	0.536	1.657
A.C.	0.732	1.029
V.M.	0.701	2.571
RANC	0.186	1.057
CAL.	0.083	0.192

TABLA 5:2

Una vez determinadas las tasas de compra corresponde validar el supuesto de comportamiento Poisson. En general, el método más utilizado para realizar esto es mediante el test de bondad de ajuste (χ^2). La formulación de este método es la siguiente. Sea un conjunto de observaciones z_1, z_2, \dots, z_m de una cierta variable aleatoria. Se desea verificar la hipótesis que los z_i se distribuyen de acuerdo a una cierta variable aleatoria Z . Para ello, se particiona el espacio de valores posibles de Z en r subconjuntos $\{A_j\}_{j=1}^r$. De acuerdo a la distribución de Z existe una probabilidad p_j que la variable Z tome un valor en A_j . Por otro lado, sea m_j el número de observaciones de las m que están contenidas en A_j . Si los z_i se distribuyen según Z se cumple entonces que:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^r \frac{(m_j - m \cdot p_j)^2}{m \cdot p_j} \quad (5.2)$$

se distribuye según una distribución χ^2 de $r - 1$ grados de libertad.

Existen dos impedimentos en este caso para la aplicación de este método. El primero tiene relación con el número de datos disponibles. En principio el test χ^2 es confiable cuando el número de observaciones que se dispone es grande, lo que no sucede en este caso. El segundo impedimento que se presenta tiene relación con la forma en que se midieron los datos. Las observaciones x_1, x_2, \dots, x_n de número de ventas en una tienda por producto para un nivel de precio dado están medidas en periodos de duración diferentes, y por tanto corresponde en principio a distribuciones distintas. En efecto, suponer que la tasa de compra es la misma para los x_i implica que el parámetro de la distribución Poisson que la define es de la forma $\lambda T_i(1 - F(p))$ y aunque la tasa de compra $\lambda(1 - F(p))$ es común para los x_i al ser T_i distinto entre los x_i se tendrá que las distribuciones poissonianas de cada x_i son distintas entre sí. Por lo tanto, el test χ^2 que se aplica para verificar si un conjunto de observaciones sigue una distribución particular no es aplicable, al menos en su forma estándar.

Para solucionar los problemas anteriores se utiliza una adaptación del test de bondad de ajuste.

- Primer Paso

El primer paso consiste en “normalizar” las observaciones de las ventas de tal forma de eliminar la dificultad que se presenta por las distintas duraciones de los periodos en que fueron tomadas. Para ello, se utiliza un propiedad que satisface la distribución de Poisson (Girault (1965)).

Dado que se han producido N realizaciones de un proceso Poisson en un intervalo de tiempo T , entonces se tiene que los instantes de tiempo en los cuales se produjeron estas N realizaciones se distribuyen uniformemente en el intervalo de duración T

A partir del resultado anterior se procedió de la siguiente forma. Sean x_1, x_2, \dots, x_n los niveles de venta observados durante los periodos T_1, T_2, \dots, T_n para un producto dado en una tienda particular y para un nivel de precio fijo. Entonces, las x_i ventas se produjeron en instantes de tiempo distribuidos uniformemente en el intervalo de duración T_i . Luego, mediante simulación se genera un conjunto $\{t_j(i)\}_{j=1}^{x_i}$ de instantes de tiempo uniformemente distribuidos en un periodo de duración T_i que representan los instantes de tiempo en los cuales se produjeron cada una de las x_i ventas.

Mediante este procedimiento, el conjunto total de ventas $X = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ se distribuye completamente en el periodo de duración $T = T_1 + T_2 + \dots + T_n$. El periodo total se divide en subperiodos de igual duración D . Sea D_k el k -ésimo periodo de duración D ($k = 1, 2, \dots, T/D$), y sea y_k el número de ventas cuyos tiempos de ocurrencias (generados por el procedimiento anterior) están contenidos en D_k . Bajo la hipótesis de distribución Poisson de las ventas las $\{y_k\}_{k=1}^{T/D}$ están idénticamente distribuidas según una distribución de Poisson de parámetro $\hat{\lambda}D(1 - F(p))$ y por tanto es posible calcular el estadístico χ^2 dado por (5.2). Con objeto de reducir la dependencia de χ^2 en relación a la simulación de los instantes en los que se producen las ventas, el procedimiento completo anterior se repite s veces obteniéndose un conjunto $\{\chi_j^2\}_{j=1}^s$ de valores para el estadístico. Finalmente se calcula el promedio de los χ_j^2 , generando un valor $\bar{\chi}^2$.

- Segundo Paso

El segundo paso consiste en solucionar el problema asociado al bajo número de observaciones que se dispone. La dificultad que se presenta en esta situación es que $\bar{\chi}^2$ no se distribuye en principio según una chi-cuadrado. Lo que se debe hacer entonces es determinar cual es la verdadera distribución de $\bar{\chi}^2$. Para ello, se procedió de la siguiente forma.

Bajo la hipótesis que las ventas en los periodos T_1, T_2, \dots, T_n tiene un comportamiento Poisson de tasa constante $\hat{\lambda}(1 - F(p))$, se genera mediante simulación un conjunto e_1, e_2, \dots, e_n que corresponden a las ventas en los periodos T_i . A los e_i se les aplica el procedimiento visto en el *Primer Paso* obteniéndose un valor para el estadístico $\bar{\chi}^2$.

De esta forma, repitiendo v veces el esquema anterior es posible obtener una secuencia de valores para $\bar{\chi}^2$ y a partir de ellos obtener en forma experimental la función de distribución para $\bar{\chi}^2$. Si $G(\cdot)$ representa la función de distribución buscada entonces lo que se tiene es que:

$$G(x) = \frac{n(x)}{v} \quad (5.3)$$

donde $n(x)$ representa el número de veces que se obtuvo un valor de $\bar{\chi}^2$ menor o igual a x del total de v realizaciones.

- Tercer Paso

Por último, corresponde realizar la validación del supuesto de comportamiento Poisson para las ventas, esto se realizó de la siguiente forma. Bajo la hipótesis de comportamiento Poisson de las ventas el estadístico $\bar{\chi}^2$ determinado en el *Primer Paso* se distribuye de acuerdo a la distribución $G(x)$ determinada en el *Segundo Paso*. Por lo tanto, se aceptará la hipótesis con un nivel de confianza $100(1 - \alpha)\%$ si se observa que:

$$1 - G(\bar{\chi}^2) > \alpha \quad (5.4)$$

5.2.2 Resultados

La metodología anterior se aplicó a un grupo de productos que son vendidos en las 8 tiendas. Estos productos son 6 tipos de camisones de dormir bastante similares en precios de venta y costos. Para simplificar la notación se les designará por CD_i ($i = 1, \dots, 6$). El ANEXO V contiene el conjunto de datos recopilados de precios e inventarios iniciales para estos 6 productos.

Los valores de las estimaciones máximo verosimiles para la tasa de venta de cuatro de estos productos en función del precio ($\lambda(1 - \hat{F}(p))$) se presentan en la siguiente tabla:

Tienda	CD_1		CD_2		CD_3		CD_4	
	\$ 11450	\$ 7890	\$ 11450	\$ 7890	\$ 11500	\$ 7890	\$ 10250	\$ 7890
CENT.	1.824	4.514	0.196	4.286	0.810	1.667	0.714	3.000
P.A.	0.897	2.714	0.247	1.203	0.270	0.167	0.222	0.360
P.V.	0.990	2.914	0.619	0.829	0.373	0.986	0.516	1.167
PROV	0.536	1.657	0.206	0.886	0.262	0.167	0.270	0.482
A.C.	0.732	1.029	0.196	0.513	0.016	0.030	0.206	0.394
V.M.	0.701	2.571	0.722	0.513	0.230	0.667	0.397	0.667
RANC	0.186	1.057	0.103	0.543	0.159	0.345	0.079	0.167
CAL.	0.083	0.192	0.031	0.029	0.021	0.034	0.210	0.332

TABLA 5:3

Una vez calculadas estas tasas se procedió a calcular los valores de los estadísticos $\bar{\chi}^2$ para cada producto y para cada nivel de precio de acuerdo al método descrito en el *Primer Paso* del punto anterior. El número de simulaciones (s) que se realizaron en el cálculo de cada valor de $\bar{\chi}^2$ fue de 100. A continuación se presenta a modo de ejemplo los resultados obtenidos para los 6 productos en 4 tiendas para un nivel de precio.

Tiendas	CD_1	CD_2	CD_3	CD_4	CD_4	CD_6
	\$ 7890	\$ 7890	\$ 11500	\$ 10250	\$ 13500	\$ 11290
CENT.	31.088	139.172	198.670	4994	3.319	2.378
P.A.	7.912	5.606	2.646	4.218	2.533	2.987
P.V.	11.571	20.903	2.220	4.049	3.661	2.123
PROV	6.381	5.110	2.750	2.943	4.836	2.214

TABLA 5:4

Posteriormente se determinaron las funciones de distribución ($G(x)$) para cada uno de los estadísticos presentados en el cuadro anterior, para ello se utilizó la metodología desarrollada en el *Segundo Paso* del punto anterior. El número de observaciones que se genero para construir cada función $G(x)$ fue de 70.

Finalmente, en base a la información determinada anteriormente se procedió a verificar la hipótesis de comportamiento Poisson de las ventas de los 6 productos en cada una de las 8 tiendas. Para un nivel de confianza del 95% y en todos los casos se obtuvo que no existía información suficiente para rechazar la hipótesis.

5.3 DISTRIBUCION DEL PRECIO DE RESERVA

Una de las principales componentes del modelo y la demanda es la distribución del precio de reserva. Como ya fue dicho, el precio de reserva representa la disponibilidad a pagar de cada cliente por el producto. Dado que el conjunto de clientes que visitan una tienda es desde este punto de vista heterogeneo el precio de reserva es un variable aleatoria al interior de dicho grupo. Ahora bien, la modelación de esta variable debería en principio involucrar diversos aspectos tanto económicos como sicológicos como fue comentado en el capítulo introductorio. Para efectos de este trabajo se adoptará un criterio simplificador y se asumirá que todos los factores que influyen sobre el comportamiento del precio de reserva , salvo el precio, permanecen constantes. De esta forma, a partir de las observaciones que

se disponen se modelará la función de distribución o de densidad de precio de reserva sólo dependiendo del nivel de precios.

El primer paso es postular un comportamiento para el precio de reserva. Como vimos en el capítulo anterior la distribución *Weibull* presenta cierta ventajas de manejo algebraico como también parece adaptarse bien al comportamiento de compra en general. Es por ello que se asumirá que el precio de reserva se distribuye de acuerdo a una Weibull de parámetros α y β , es decir que la función de distribución para el precio de reserva viene dada por:

$$F(p) = 1 - e^{-\alpha \cdot p^\beta} \quad (5.5)$$

o bien definiendo $\rho = \sqrt[\beta]{\alpha}$

$$F(p) = 1 - e^{-(\rho \cdot p)^\beta} \quad (5.6)$$

Al igual que en la sección anterior primero se describe la metodología utilizada en estimación de la función de densidad del precio de reserva para luego presentar los resultados obtenidos en los seis productos considerados anteriormente.

5.3.1 Aspectos Metodológicos

Al asumir que la función de distribución del precio de reserva se comporta según una Weibull, el problema de determinar su forma se limita a calcular los valores de los parámetros α y β o bien ρ y β . Ahora bien, los datos que se disponen para ello corresponden a las tasas de compra por producto y para un precio dado para los seis productos, es decir, datos de la forma $\lambda_{ij}(1 - F_{ij}(p))$, donde λ_{ij} representa la tasa de llegada de los clientes del producto i en la tienda j y F_{ij} corresponde a la función de distribución del precio de reserva de los clientes del producto i en la tienda j . Sin embargo, al visualizar una tienda por departamentos como FALABELLA parece razonable pensar que los clientes que llegan a una tienda en particular son potenciales clientes de todos los productos que hay en la tienda y por tanto

$$\lambda_{ij} = \lambda_j \quad \forall i \quad (5.7)$$

La condición anterior puede ser demasiado simplista si se considera que los clientes que van a una tienda a comprar por ejemplo electrodomésticos no visitarán los puntos donde se venden perfumes. Sin embargo, los productos que se considera en este estudio son todos de un mismo tipo y por tanto la condición (5.7) parece bastante razonable en esta situación.

A partir de lo anterior, los datos pueden agruparse por tiendas generándose un conjunto de observaciones del tipo $\lambda_j \cdot (1 - F_{ij}(p))$ para los distintos niveles de precio disponible. Si se dispone de m observaciones de precios distintos para cada producto (con un total de I productos), se tendrán $m \cdot I$ en total para cada tienda, además cada F_{ij} dado los supuestos que se han establecidos tiene dos parámetros por estimar sumados a la tasa de llegada λ_j hacen un total de $2 \cdot I + 1$ parámetros por estimar. En resumen se tienen para cada tienda $m \cdot I$ ecuaciones para un total de $2 \cdot I + 1$ parámetros por estimar. Lo ideal para obtener una estimación buena es que el número de ecuaciones sea mucho mayor que el número de incógnitas.

Para que la diferencia mencionada anteriormente sea mayor se incluirá un supuesto adicional sobre el comportamiento de compra de los clientes de los distintos productos.

Es lógico pensar que para productos distintos las distribuciones de los precios de reserva deben ser distintas, sin embargo al ser los productos muy parecidos entre sí parece razonable pensar que la variabilidad que presentan las distintas distribuciones deberían ser parecidas en términos relativos, es decir, si p_1 y p_2 son los precios de reserva medios para los productos 1 y 2 entonces lo que se postula es que la fracción de clientes que tienen un precio de reserva contenido en el intervalo $[p_i(1-a\%); p_i(1+a\%)]$ es muy parecida para $i = 1$ e $i = 2$.

Lo que se supondrá entonces es que el coeficiente de variabilidad (τ) para las distribuciones de los precios de reserva es constante entre los distintos productos, es decir:

$$\tau_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\bar{p}_{ij}} \equiv \tau = \text{constante} \quad (5.8)$$

donde σ_{ij} representa la desviación estandar de $F_{ij}()$ y \bar{p}_{ij} representa la media de $F_{ij}()$.

Ahora bien, para una distribución Weibull se cumple que:

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{1}{\rho} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \\ \sigma &= \frac{1}{\rho} \cdot \sqrt[2]{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) + \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right)^2} \end{aligned} \quad (5.9)$$

y por tanto se tiene:

$$\tau = \frac{\sigma}{\bar{p}} = \frac{\sqrt[2]{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) + \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right)^2}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)} \quad (5.10)$$

De esta forma, el supuesto de coeficiente de variación constante aplicado sobre una distribución Weibull señalan que el término derecho de (5.10) es constante y por tanto β debe ser constante.

Lo que se ha conseguido entonces con el supuesto anterior es que para cada tienda se dispone de un conjunto de $m \cdot I$ ecuaciones y un conjunto de $I + 2$ incógnitas. Si $\lambda_{ij}(p)$ representan las observaciones de las tasas de compra para el producto i en la tienda j con un precio p , las que fueron determinadas en la sección anterior, entonces el sistema de ecuaciones que se dispone para determinar los parámetros de interés es para cada tienda es:

$$\lambda_{ij} = \lambda_j \cdot e^{-(\rho_{ij} \cdot p)^\beta} \quad (5.11)$$

o bien, tomando logaritmo natural en (5.11)

$$\ln(\lambda_{ij}(p)) = \ln(\lambda_j) - \rho_{ij}^\beta \cdot p^\beta \quad (5.12)$$

La estimación de los parámetros λ_j , ρ_{ij} y β del sistema de ecuaciones descrito en (5.12) se hace por el método de mínimos cuadrados.

5.3.2 Resultados

En base al procedimiento descrito en el punto anterior y a los datos obtenidos en la sección anterior se estimaron los parámetros que conforman las distribuciones del precio de reserva de los distintos productos en las distintas tiendas como también las tasas de llegada de los clientes en cada tienda.

Como se explicó en el punto anterior el parámetro β de la distribución Weibull se postuló constante entre los distintos productos y tiendas. El valor que se obtuvo fue de $\beta = 8$.

El otro parámetro de la distribución ρ depende tanto del producto como de la tienda y los resultados que se obtuvo en este caso son:

$\rho \cdot 10^3$						
Tienda	CD_1	CD_2	CD_3	CD_4	CD_5	CD_6
CENT.	0.0868	0.1012	0.0840	0.1038	0.0897	0.0726
P.A.	0.0890	0.0931	0.0827	0.0906	0.0623	0.0785
P.V.	0.0888	0.0754	0.0874	0.0967	0.0654	0.0840
PROV	0.0892	0.0921	0.0838	0.0926	0.0613	0.0838
A.C.	0.0768	0.0875	0.0827	0.0937	0.0711	0.0705
V.M.	0.0908	0.0842	0.0882	0.0914	0.0665	0.0842
RANC	0.0942	0.0937	0.0848	0.0955	0.0783	0.0706
CAL.	0.0866	0.0793	0.0801	0.0898	0.0715	0.0685

TABLA 5:5

Las tasas de llegada de los clientes a las tiendas medidas en personas por días son:

Tienda	Tasa
CENT.	3.1406
P.A.	2.3262
P.V.	2.4431
PROV	2.7183
A.C.	1.8602
V.M.	2.7078
RANC	2.8116
CAL.	1.8787

TABLA 5:6

No debe extrañar los valores bajos de las tasas de llegada de la TABLA 5:6 pues ellas modelan solamente los clientes que van a ver los camisones de dormir, no representan las tasas de llegada a la tienda como un todo.

5.4 FUNCION DE BENEFICIO

Las secciones anteriores permitieron verificar que el modelo desarrollado en este trabajo es aplicable a una tienda como FALABELLA. En esta sección se presenta el comportamiento de la función de beneficio a partir de los resultados encontrados. En principio, la función de beneficio para un producto cualquiera involucra la coordinación de las ocho tiendas, sin embargo, como en el capítulo anterior se estudió el caso de dos tiendas se construirá la función de beneficio para un producto cualquiera vendido sólo en dos tiendas.

Las tiendas elegidas en la modelación son CALAMA (CAL.) y CENTRO (CENT.). La elección de estas dos tiendas se debe a que representan los dos extremos en términos del flujo de clientes que las visita. El producto seleccionado es CD_2 pues para las tiendas escogidas es en este producto donde se observa la mayor diferencia entre las funciones de demanda.

Se considerará un horizonte de venta de 200 días (aproximadamente 6 meses) el cual se divide en 4 periodos de precio constante de 50 días cada uno.

La formulación de la función de beneficio es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 V_4(c_1, c_2) &= \max_{p \geq 0} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} [p \cdot (\min(c_1, k_1) + \min(c_2, k_2)) \\
 &+ V_3(\max(0, c_1 - k_1), \max(0, c_2 - k_2))] \text{Prob}(D_1(p) = k_1, D_2(p) = k_2) \quad (5.13)
 \end{aligned}$$

Donde $V_4(c_1, c_2)$ corresponde al beneficio máximo esperado al comienzo del ciclo de venta si el inventario disponible es c_1 en la tienda 1 (CAL.) y c_2 en la tienda 2 (CENT.), $Prob(D_1(p) = k_1, D_2(p) = k_2)$ representa la probabilidad que la demanda en la tienda 1 sea k_1 y en la tienda 2 k_2 con un precio de p .

Las tasas de compra para las tiendas son de la forma $\lambda_i(1 - F_i(p))$ con $\lambda_1 = 1.8787$ y $\lambda_2 = 3.1406$ personas por día respectivamente. Además, $1 - F_1(p) = e^{-(7.93 \cdot 10^{-5} \cdot p)^8}$ y $1 - F_2(p) = e^{-(10.12 \cdot 10^{-5} \cdot p)^8}$.

Finalmente, los inventarios iniciales considerados son $c_1 = 10$ y $c_2 = 20$.

A continuación se presentan los resultados más importantes obtenidos en la construcción de la función de beneficio.

El siguiente gráfico muestra tres curvas del nivel de beneficio en función del precio.

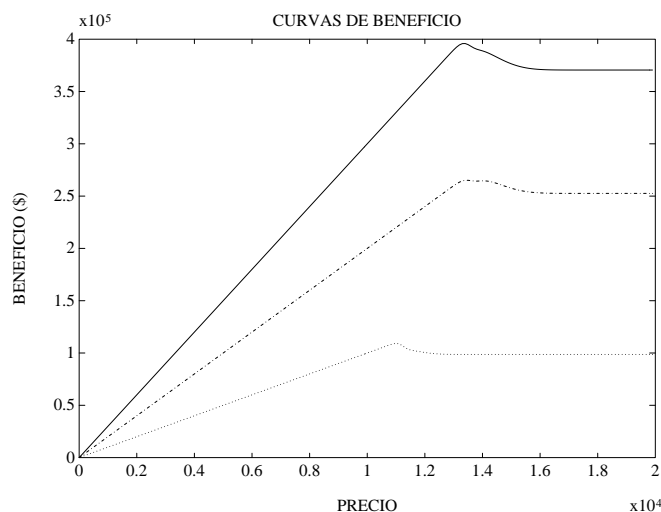


GRAFICO 5:1

La curva continua del gráfico 5:1 corresponde a un nivel de inventario inicial de $c_1 = 10$ y $c_2 = 20$, la curva de (-.-) corresponde a niveles de inventario de $c_1 = 0$ y $c_2 = 20$, por último la curva punteada corresponde a $c_1 = 10$ y $c_2 = 0$.

Estructuralmente las tres curvas son similares, crecen a una tasa prácticamente constante desde su mínimo en 0 hasta su valor máximo para luego decrecen lentamente con el crecimiento del precio.

El precio óptimo para la curva continua es de \$13357, para la curva de trazos y puntos es de \$ 13451 mientras que para la curva punteada es de \$11006. A partir de estos valores se puede observar que la condición de crecimiento del precio con el decrecimiento del inventario (demostrada para el caso de una tienda) no se cumple, la curva punteada tiene un nivel de inventario menor que la continua sin embargo el precio óptimo de esta última es mayor. Lo

anterior se debe a que la tienda 2 tiene clientes con mayor disponibilidad a pagar que la tienda 1 y por tanto como $c_2 = 0$ en la curva punteada el precio sólo depende del comportamiento de los clientes de la tienda 1.

El siguiente gráfico muestra la evolución del precio óptimo en función del inventario de la tienda 1:

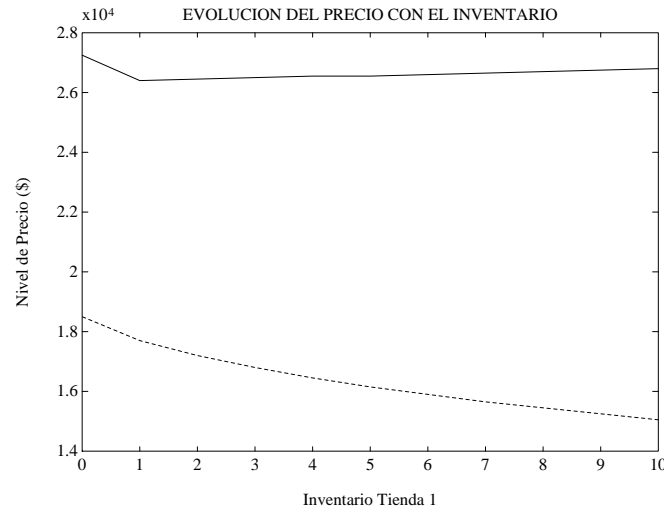


GRAFICO 5:2

La curva inferior corresponde a un nivel de inventario constante para la tienda 2 de $c_2 = 0$ mientras que la curva superior corresponde a $c_2 = 20$. Dado que los clientes en la tienda 2 tienen mayor disponibilidad a pagar que los de la tienda 1, es lógico que cuando $c_2 = 0$ el precio sea menor que en los casos en que $c_2 \neq 0$.

Por otro lado, el gráfico 5:3 muestra el comportamiento del precio óptimo en función del inventario de la tienda 2 cuando $c_1 = 10$.

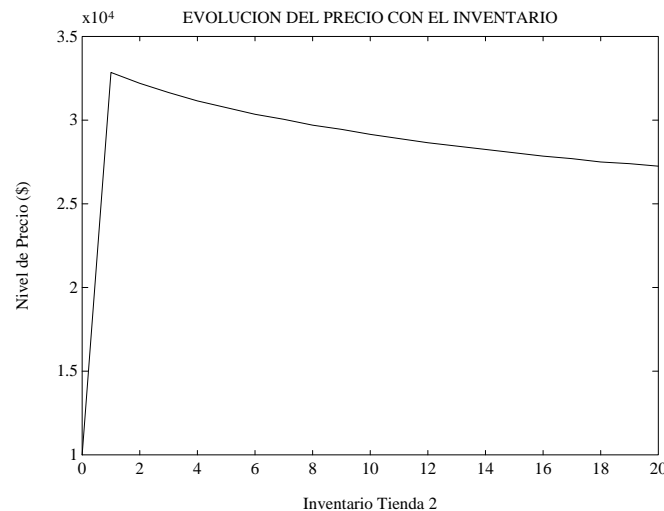


GRAFICO 5:3

En este caso el precio empieza bajo cuando $c_2 = 0$, luego crece bruscamente para $c_2 = 1$ y luego decrece lentamente al aumentar c_2 . Este comportamiento ratifica el hecho que los clientes de la tienda 2 están dispuestos a pagar más por el producto.

5.5 COMPARACION

En esta sección se compara el comportamiento del modelo desarrollado con una política alternativa de fijación de precio. El objetivo es en cierta forma cuantificar el grado de aporte que la utilización de los modelos desarrollados en este trabajo pueden tener en términos del beneficio económico que reportan.

La política alternativa de fijación de precio se basa en eliminar la característica estocástica de la demanda al momento de decidir el precio a cobrar. Para ello, se considera que la demanda es determinística y se comporta de acuerdo al valor promedio de la demanda estocástica. El comportamiento de la demanda es poissoniano su media es igual al parámetro de la distribución Poisson, es decir para una tienda en particular su demanda vendría dada por $\lambda_i \cdot T \cdot (1 - F_i(p))$. Por lo tanto, considerando las dos tiendas la demanda agregada será $\lambda_1 \cdot T \cdot (1 - F_1(p)) + \lambda_2 \cdot T \cdot (1 - F_2(p))$, donde T representa el tiempo que resta hasta el fin del periodo de venta. Considerando que en la práctica la fijación de precio se realiza básicamente en base a la experiencia, el criterio anterior aparece como razonable fuera de ser un buen sustituto del modelo estocástico. El precio a cobrar (\hat{p}) según este criterio se encuentra maximizando el beneficio por venta.

$$\hat{p} = \underset{p \geq 0}{\operatorname{argmax}} \{p \cdot [\lambda_1 \cdot T \cdot (1 - F_1(p)) + \lambda_2 \cdot T \cdot (1 - F_2(p))]\} \quad (5.14)$$

Para realizar la comparación se simuló el proceso de venta. Dado el inventario inicial se determinan los precios óptimos asociados a los dos modelos de demanda. Con los niveles de precio se obtienen realizaciones aleatorias de las ventas en cada caso. Con estas ventas se rebajan los inventarios y se repite el procedimiento. Se consideró un horizonte de 200 días con modificaciones de precio cada 50 días y se desarrollaron 200 simulaciones.

Los resultados obtenidos muestran un comportamiento significativamente superior del modelo frente a la método alternativo. El beneficio promedio en las 200 simulaciones es de \$377420 para el modelo estocástico y de \$285330 para el modelo determinístico, lo que representa un aumento del orden de 32%. El siguiente gráfico muestra el resultado de las 200 simulaciones en forma de histograma para la diferencia de los beneficios de los dos modelos.

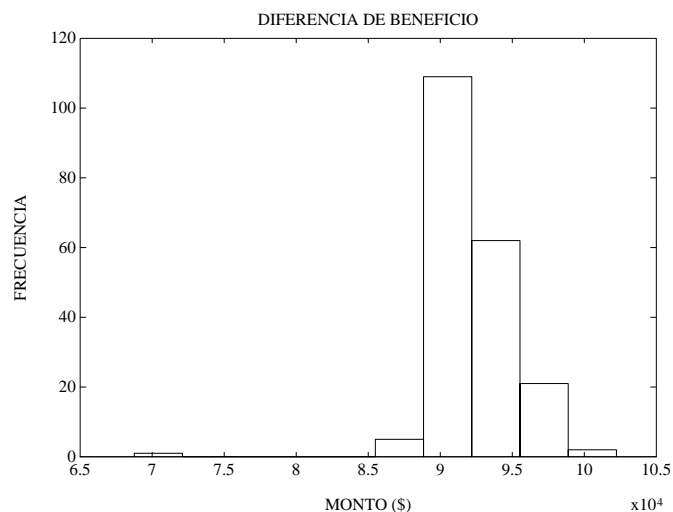


GRAFICO 5:4

Se puede observar que en más del 50% de los casos la diferencia de beneficio es del orden de \$90000 y en un 30% alcanza los \$95000. Además, en ninguna de las simulaciones el modelo determinístico superó al aleatorio.

Los resultados anteriores muestran el importante aporte que puede significar la utilización del modelo de fijación de precio estudiado en este trabajo. Incrementar en un 30% los beneficios por venta no sólo representa un importante aumento en la rentabilidad del negocio, también significa un manejo más eficiente de los recursos incrementándose la competitividad de la empresa frente a sus competidores.

Chapter 6

CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo se ha estudiado el problema de fijación de precios para productos con horizonte finito de venta (pericibles). Como se expuso en el primer capítulo el precio es sin duda una variable muy importante en la comercialización de cualquier producto, en especial los pericibles, si se agrega a esto el hecho que existen en la actualidad muy pocos trabajos que enfrentan analíticamente el problema de fijación de precio en escenarios de demanda estocástica se encuentra la justificación para el desarrollo de esta memoria.

La formulación del modelo se encuadra en el campo de la programación dinámica estocástica. El comportamiento estocástico se observa en la demanda y se descompone en un proceso Poisson de llegada de los clientes a las tiendas y en una disponibilidad a pagar aleatoria entre los distintos consumidores. La formulación dinámica se debe esencialmente a la necesidad de incluir, a medida que se desarrolla el periodo de venta, los resultados ya observados.

Como punto de partida del estudio, se formuló el “modelo de tiempo continuo”. En él se intenta dar, como su nombre lo sugiere, un comportamiento continuo al tiempo de tal forma de poder revisar el precio a cada instante. Esta formulación puramente teórica se desarrolló imponiendo que entre dos revisiones sucesivas del precio a lo más una venta puede producirse. El estudio se realizó para un escenario de dos tiendas que enfrentan consumidores distintos cobrando el mismo precio.

Ciertas conductas intuitivas de la función de beneficio conjunta se verificaron, como por ejemplo, que el beneficio aumenta si (i): se incrementa el inventario en cualquier tienda y (ii): se aumenta la duración del periodo de venta.

En relación al comportamiento del precio y bajo ciertos supuestos sobre la conducta de la función de beneficio se verificaron (i): para inventarios iguales el precio aumenta si aumenta la duración del periodo de venta y (ii): el precio disminuye si aumenta el inventario en alguna

tienda.

Posteriormente y con objeto de establecer un nivel de confiabilidad de los resultados entregados por el modelo se desarrolló un análisis de sensibilidad de los resultados frente a una posible incertidumbre en la estimación de la demanda.

La disponibilidad a pagar de los clientes es sin duda una de las componentes principales del modelo pero a la vez de las más difíciles de determinar. Esto se debe principalmente por su dependencia con aspectos psicológicos y subjetivos asociados a la conducta de compra de los consumidores los que son complejos en su modelación.

Es por este motivo que en el capítulo 3 se analiza el comportamiento de la función de beneficio frente a posibles incertidumbres en la estimación de la función de distribución del precio de reserva. La caracterización de la incertidumbre se basa en suponer que el valor verdadero de la función de distribución oscilaba en torno del valor estimado según una variación porcentual constante. El desarrollo se realizó bajo el modelo de tiempo continuo y para una tienda. Se determinó un cota superior para el error porcentual generado en la función de beneficio. La cota depende del nivel de precio y a través de este del inventario y la duración del periodo de venta. Se observó que la cota encontrada resulta ser creciente con la duración del periodo de venta y decreciente con el nivel de inventario.

En el capítulo 4 se desarrolló el modelo de revisiones periódicas. En este modelo se adopta un criterio más realista en términos de las modificaciones de precio. Se asume que el precio sólo puede ser modificado un número reducido y predeterminado de veces durante el periodo de venta.

En la primera parte se estudia el caso de una tienda. Primero se asume que el precio no puede modificarse durante el ciclo de venta determinándose el comportamiento del precio frente a variaciones en el inventario y en la duración del horizonte de venta. Se determinó que el precio es decreciente con el nivel de inventario, lo que se ajusta a la intuición y a los resultados encontrados en el capítulo 2, mientras más inventario se disponga existirán mayores incentivos en aumentar el volumen de venta y por tanto se hace necesario disminuir el precio. Por otro lado, si la duración del periodo de venta aumenta existirá un número mayor de clientes con alta disponibilidad a pagar que visitan la tienda, por lo que un precio mayor se traduce en incrementos del beneficio. A partir de estos resultados se encontraron cotas superiores para el nivel de precio y para la función de beneficio. La cota inferior para el precio se obtiene tendiendo a infinito el nivel de inventario mientras que la cota superior del precio se obtiene para un inventario inicial de una unidad. Posteriormente

se consideró el caso que el precio sólo es modificado una vez durante el periodo de venta. En este escenario se encontró que el precio cobrado en el primer subperiodo mantenía su comportamiento decreciente con el inventario y creciente con la duración del periodo de venta. Se determinaron nuevamente cotas superiores e inferiores tanto para el precio como para el beneficio utilizando el mismo criterio señalado anteriormente.

En la segunda parte del capítulo 4 se extendió el modelo al caso que existan dos tiendas. En este escenario las conclusiones de decrecimiento para el precio en términos de crecimientos del inventario de alguna de las tiendas ya no se cumple. En este caso el precio óptimo a cobrar se encuentra contenido en el intervalo definido por los precios óptimos de las dos tiendas por separado. Es entonces posible que al aumentar el inventario de la tienda con clientes con mayor disponibilidad a pagar el precio óptimo crezca. El comportamiento anterior hace pensar que en una situación como esa el inventario total está mal distribuido entre las dos tiendas. Por ello, se determinó una condición que permitiese distribuir el inventario total en forma eficiente entre las tiendas, intentando con esto eliminar el comportamiento inesperado de aumentos de precio frente a aumentos en el inventario.

Por último en el capítulo 5 se desarrolló una aplicación de los modelos al caso de una importante tiendas por departamento chilena que cuenta con 8 tiendas.

Se tomaron datos de inventarios iniciales, precios y ventas para un conjunto de productos que son tratados como perecibles en esta empresa. A partir de la información recolectada se procedió a validar el comportamiento poissoniano de las llegadas de los clientes a la tienda. Para todas las tiendas y en los 6 productos considerados la hipótesis no pudo ser rechazada con un nivel de confianza del 95%. Posteriormente se postuló una distribución Weibull para el precio de reserva. Como los productos considerados son muy similares se asumió que la tasa de llegada de los clientes que van a ver estos productos era constante entre productos de una misma tienda. Además, se supuso que el coeficiente de variación para el precio de reserva era constante entre los clientes de una tienda. Este supuesto aparece razonable si se considera que los clientes de una misma tienda presenta un comportamiento similar en su disponibilidad a pagar por cada producto. Con estas consideraciones se estimaron las tasas de llegada y los parámetros de la distribución Weibull para los 6 productos mediante el método de mínimos cuadrados. Posteriormente se calculó la función de beneficio para un producto en particular y considerando dos tiendas representando su comportamiento en función del precio como también la trayectoria del precio óptimo en función del inventario.

Finalmente, se consideró una política alternativa de fijación de precio con objeto de

realizar un comparación entre los resultados entregados por el modelo desarrollado y este criterio alternativo. La política alternativa elimina el comportamiento estocástico de la demanda y asume como demanda el valor promedio de la demanda estocástica. Se realizaron 200 simulaciones del proceso de venta encontrándose que el método desarrollado en este trabajo fue siempre mejor, en términos del ingreso por venta, que el método alternativo. En promedio el aumento en el beneficio fue de 30%.

Bibliography

- [1] Belobaba (1989), "*Application of a Probabilistic Decision Model to Airline Seat Inventory Control*". Operations Research, Vol. 37, No. 2, 183-97.
- [2] Bickel and Doksum (1977), "*Mathematical Statistics*". Holden-Day, Inc, Paris.
- [3] Bitran y Mondschein (1994), "*Periodic Pricing of Seasonal Products in Retailing*". MIT, working paper.
- [4] Gallego y Van Ryzin (1992), "*Optimal Dynamic Pricing of Inventories with Stochastic Demand Over Finite Horizons*".
- [5] Girault (1965), "*Processus Aléatoires*". DUNOD, Paris.
- [6] Gupta y Morrison (1991), "*Estimating Heterogeneity in Consumers' Purchase Rates*". Marketing Science, Vol. 3, 264-69.
- [7] Kahn y Raju (1991), "*Effects of Price Promotions on Variety-seeking and Reinforcement Behavior*". Marketing Science, Vol. 10, 316-337.
- [8] Kalwani y Yim (1992), "*Consumer Price and Promotion Expectations, an Experimental Study*". J. of Marketing Research, Vol. XXIX, 90-100.
- [9] Lazear (1986), "*Retail Pricing and Clearance Sales*". American Economic Review, Vol. 76, No. 1, 14-32.
- [10] Lichtenstein, Ridgway y Netemeyer (1993), "*Price Perceptions and Consumer Shopping Behavior: A Field Study*". J. of Marketing Research, Vol XXX, 234-45.
- [11] Pashigian (1988), "*Demand Uncertainty and Sales: A Study of Fashion and Markdown Pricing*". The American Economic Review, Vol. 78, No. 5, 936-953.
- [12] Rajan, Rakesh y Steinberg (1992), "*Dynamic Pricing and Ordering Decisions by a Monopolist*". Management Science, Vol. 38, 240-63.

Chapter 7

ANEXO I

La demostración de las propiedades se hace por inducción sobre $k = t + c_1 + c_2$.

Propiedad 1: $\forall c_2 \geq 0$ y $\forall c_1 \geq t$

$$B_t(c_1 + 1, c_2) = B_t(c_1, c_2)$$

Demostración:

- $k = 0$.

En este caso la proposición es claramente cierta pues si $k = 0$ se tiene que $t = 0$, en cuyo caso tanto el miembro de la derecha como él de la izquierda son iguales a 0.

- Se asume la proposición válida para todo t, c_1, c_2 tales que:

$$k > t + c_1 + c_2$$

- Se demuestra para $k = t + c_1 + c_2$.

$c_1 = 0$ y $c_2 \neq 0$.

Como $c_1 = 0$ y t debe ser menor o igual a c_1 y positivo se tiene que $t = 0$, luego en este caso la proposición es inmediata.

$c_1 \neq 0$ y $c_2 = 0$.

Sea p el precio óptimo para $B_t(c_1 + 1, 0)$, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} B_t(c_1, 0) &\geq p\lambda_1(p) + B_{t-1}(c_1 - 1, 0)\lambda_1(p) \\ &\quad + B_{t-1}(c_1, 0)(1 - \lambda_1(p)) \\ B_t(c_1 + 1, 0) &= p\lambda_1(p) + B_{t-1}(c_1, 0)\lambda_1(p) \\ &\quad + B_{t-1}(c_1 + 1, 0)(1 - \lambda_1(p)) \end{aligned}$$

Tomando la diferencia entre las dos expresiones anteriores se tiene que $B_t(c_1 + 1, 0) - B_t(c_1, 0)$ es menor o igual a:

$$\begin{aligned} B_t(c_1 + 1, 0) - B_t(c_1, 0) &\leq [B_{t-1}(c_1, 0) - B_{t-1}(c_1 - 1, 0)]\lambda_1(p) \quad [1] \\ &\quad + [B_{t-1}(c_1 + 1, 0) - B_{t-1}(c_1, 0)](1 - \lambda_1(p)) \quad [2] \end{aligned}$$

Usando la hipótesis inductiva para $t - 1, c_1 - 1, c_2 = 0$ la expresión [1] es igual a 0 y [2] es igual a 0, luego $B_t(c_1 + 1, 0) - B_t(c_1, 0)$ es acotada superiormente por 0 y además es claramente no negativa. Por tanto se tiene que:

$$B_t(c_1 + 1, 0) = B_t(c_1, 0)$$

- $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$.

Sea p el precio óptimo para $B_t(c_1 + 1, c_2)$, entonces se tiene que $B_t(c_1 + 1, c_2) - B_t(c_1, c_2)$ es menor o igual a:

$$\begin{aligned} B_t(c_1 + 1, c_2) - B_t(c_1, c_2) &\leq [B_{t-1}(c_1, c_2) - B_{t-1}(c_1 - 1, c_2)]\lambda_1(p) \quad [1] \\ &\quad + [B_{t-1}(c_1 + 1, c_2 - 1) - B_{t-1}(c_1, c_2 - 1)]\lambda_2(p) \quad [2] \\ &\quad + [B_{t-1}(c_1 + 1, c_2) - B_{t-1}(c_1, c_2)](1 - \lambda_1(p) - \lambda_2(p)) \quad [3] \end{aligned} \tag{7.1}$$

Usando la hipótesis inductiva para $t - 1, c_1 - 1, c_2$ la expresión [1] es igual a 0 ,la expresión [2] es igual a 0 y la expresión [3] es igual a 0, luego $B_t(c_1 + 1, c_2) - B_t(c_1, c_2)$ es acotada superiormente por 0 y además es claramente no negativa. Por tanto se tiene que:

$$B_t(c_1 + 1, c_2) = B_t(c_1, c_2)$$

Por último, el en cuarto caso en que c_1 y c_2 son iguales a 0, la proposición es claramente inmediata (ver caso 1). Por lo tanto la propiedad 1 es válida para todo t, c_1 y c_2 con c_1 mayor o igual a t . ■

Propiedad 2: $\forall c_2 \geq 0$ y $\forall c_1 < t$

$$B_t(c_1 + 1, c_2) > B_t(c_1, c_2)$$

Demostración:

a) $k = 1$. (Para $k = 0$ no se cumple que $t > c_1$)

Si $k = 1$, se tiene que $t = 1, c_1 = 0$ y $c_2 = 0$ con lo cual la propiedad 2 es inmediata.

b) Se asuma la proposición válida para todo t, c_1, c_2 tales que:

$$k > t + c_1 + c_2$$

c) Se demuestra para $k = t + c_1 + c_2$.

-) $c_1 = 0$ y $c_2 \neq 0$

Sea p el precio óptimo para $B_t(0, c_2)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} B_t(1, c_2) &\geq p[\lambda_1(p) + \lambda_2(p)] + B_{t-1}(0, c_2)\lambda_1(p) \\ &\quad + B_{t-1}(1, c_2 - 1)\lambda_2(p) + B_{t-1}(1, c_2)(1 - \lambda_1(p) - \lambda_2(p)) \\ B_t(0, c_2) &= p\lambda_2(p) + B_{t-1}(0, c_2 - 1)\lambda_2(p) + B_{t-1}(1 - \lambda_2(p)) \end{aligned} \quad (7.2)$$

Tomando la diferencia entre las expresiones anteriores, se tiene que $B_t(1, c_2) - B_t(0, c_2)$ es mayor o igual a:

$$\begin{aligned}
B_t(1, c_2) - B_t(0, c_2) &\geq p\lambda_1(p) & [1] \\
&+ [B_{t-1}(1, c_2 - 1) - B_{t-1}(0, c_2 - 1)]\lambda_2(p) & [2] \\
&+ [B_{t-1}(1, c_2) - B_{t-1}(0, c_2)](1 - \lambda_1(p) - \lambda_2(p)) & [3]
\end{aligned}$$

*) Si $t = 1$ las expresiones [2] y [3] son iguales a 0 y por propiedad de regularidad de la función de demanda la expresión [1] es siempre estrictamente positiva, con lo cual la propiedad 2 es verdadera.

*) Si t es mayor a 1, se tiene que la expresión [1] es siempre estrictamente positiva, por hipótesis inductiva la expresión [2] es estrictamente positiva para $t - 1, c_1 = 0, c_2 - 1$ y la expresión [3] también es positiva en forma estricta. Por lo tanto [1]+[2]+[3] es estrictamente positiva .

-) $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$

Sea p el precio óptimo para $B_t(c_1, c_2)$, se tendrá entonces que:

$$\begin{aligned}
B_t(c_1 + 1, c_2) &\geq p[\lambda_1(p) + \lambda_2(p)] + B_{t-1}(c_1, c_2)\lambda_1(p) \\
&+ B_{t-1}(c_1 + 1, c_2 - 1)\lambda_2(p) + B_{t-1}(c_1 + 1, c_2)(1 - \lambda_1(p) - \lambda_2(p)) \\
B_t(c_1, c_2) &= p[\lambda_1(p) + \lambda_2(p)] + B_{t-1}(c_1 - 1, c_2)\lambda_1(p) \\
&+ B_{t-1}(c_1, c_2 - 1)\lambda_2(p) + B_{t-1}(c_1, c_2)(1 - \lambda_1(p) - \lambda_2(p))
\end{aligned}$$

Tomando la diferencia se tiene que la expresión $B_t(c_1 + 1, c_2) - B_t(c_1, c_2)$ es mayor o igual a:

$$\begin{aligned}
B_t(c_1 + 1, c_2) - B_t(c_1, c_2) &\geq [B_{t-1}(c_1, c_2) - B_{t-1}(c_1 - 1, c_2)]\lambda_1(p) & [1] \\
&+ [B_{t-1}(c_1 + 1, c_2 - 1) - B_{t-1}(c_1, c_2 - 1)]\lambda_2(p) & [2] \\
&+ [B_{t-1}(c_1 + 1, c_2) - B_{t-1}(c_1, c_2)](1 - \lambda_1(p) - \lambda_2(p)) & [3]
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Usando la hipótesis inductiva sobre $t - 1, c_1 - 1, c_2$ se tiene que la expresión [1] es estrictamente positiva. Análogamente usando la hipótesis inductiva sobre $t - 1, c_1, c_2 - 1$ se tiene que la expresión [2] es positiva estricta, salvo el caso en que $t - 1 = c_1$ en cuyo caso toma el valor 0 por propiedad 1, por último usando el paso inductivo sobre $t - 1, c_1, c_2$ se tiene que

la expresión [3] es positiva estricta si $t - 1 > c_1$, en caso contrario $t - 1 = c_1$ y se tendrá que la expresión [3] es nula. Sin embargo, como [1] es siempre positiva estricta se tiene que:

$$B_t(c_1 + 1, c_2) - B_t(c_1, c_2) > 0$$

El caso en que $c_2 = 0$, es simplemente un caso particular del anterior, solo debe considerarse $\lambda_2(p) = 0$, con lo cual la conclusión anterior sigue siendo válida. El caso en que ambos niveles de inventario son nulos, el resultado es directo. ■

Propiedad 3: $\forall c_1, \forall c_2$ con $c_1 \neq 0$ ó $c_2 \neq 0$

$$B_{t+1}(c_1, c_2) > B_t(c_1, c_2)$$

Demostración:

a) $k = 1$.

Si $k = 1$ se debe tener $t = 0, c_1 = 1, c_2 = 0$ o bien $t = 0, c_1 = 0, c_2 = 1$. En ambos casos la propiedad es inmediata.

b) Se asume la proposición válida para todo t, c_1, c_2 tales que:

$$k > t + c_1 + c_2$$

c) Se demuestra para $k = t + c_1 + c_2$

En el caso en que $t = 0$ la propiedad es directa y por tanto se supondrá en adelante que $t > 0$.

-) $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$

Sea p el precio óptimo para $B_t(c_1, c_2)$, se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} B_{t+1}(c_1, c_2) &\geq p[\lambda_1(p) + \lambda_2(p)] + B_t(c_1 - 1, c_2)\lambda_1(p) \\ &\quad + B_t(c_1, c_2 - 1)\lambda_2(p) + B_t(c_1, c_2)(1 - \lambda_1(p) - \lambda_2(p)) \\ B_t(c_1, c_2) &= p[\lambda_1(p) + \lambda_2(p)] + B_{t-1}(c_1 - 1, c_2)\lambda_1(p) \end{aligned}$$

$$+B_{t-1}(c_1, c_2 - 1)\lambda_2(p) + B_{t-1}(c_1, c_2)(1 - \lambda_1(p) - \lambda_2(p))$$

Tomando la diferencia entre las expresiones anteriores se tendrá entonces que $B_{t+1}(c_1, c_2) - B_t(c_1, c_2)$ es mayor o igual a:

$$\begin{aligned} B_{t+1}(c_1, c_2) - B_t(c_1, c_2) &\geq [B_t(c_1 - 1, c_2) - B_{t-1}(c_1 - 1, c_2)]\lambda_1(p) \quad [1] \\ &\quad + [B_t(c_1, c_2 - 1) - B_{t-1}(c_1, c_2 - 1)]\lambda_2(p) \quad [2] \\ &\quad + [B_t(c_1, c_2) - B_{t-1}(c_1, c_2)](1 - \lambda_1(p) - \lambda_2(p)) \quad [3] \end{aligned} \tag{7.4}$$

Por hipótesis inductiva las expresiones [1], [2] y [3] son estrictamente positiva. En efecto, la primera se demuestra para $t - 1, c_1 - 1, c_2$. La segunda para $t - 1, c_1, c_2 - 1$, por último la expresión [3] es mayor estricta que cero usando la hipótesis inductiva en $t - 1, c_1, c_2$. Luego se tiene que:

$$B_{t+1}(c_1, c_2) > B_t(c_1, c_2)$$

Para el caso en que c_i ($i=1,2$) es cero bastará reemplazar $\lambda_i(p) = 0$ en la expresión anterior, pero como algún nivel de inventario debe ser positivo, el resultado anterior se mantendrá. ■

Chapter 8

ANEXO II

Proposición 20 *Si la función de beneficio satisface la siguiente condición ¹:*

- $\forall c_2 \geq 0$ y $\forall c_1 \leq t$

$$B_{t+1}(c_1 + 1, c_2) - B_{t+1}(c_1, c_2) > B_t(c_1 + 1, c_2) - B_t(c_1, c_2)$$

entonces, para niveles de inventarios dados, el precio óptimo es no creciente con el período, es decir:

$$p_{t+1}(c_1, c_2) \geq p_t(c_1, c_2) \forall c_1, c_2$$

Demostración:

Los casos en que $c_1 = 0$ ó $c_2 = 0$, son equivalentes al caso de una sola tienda, en cuyo caso el resultado ya está probado, ver *Bitran y Mondschein (1993)*. Por lo tanto, sólo se verificará el resultado para el caso en que ambos niveles de inventarios son distintos de 0.

Sea p_1 y p_2 los precios óptimos para $B_{t+1}(c_1, c_2)$ y $B_t(c_1, c_2)$ respectivamente. Por lo tanto se tendrá que:

$$\begin{aligned} B_{t+1}(c_1, c_2) - B_t(c_1, c_2) &\leq [B_t(c_1 - 1, c_2) - B_{t-1}(c_1 - 1, c_2)]\lambda_1(p_1) \\ &\quad + [B_t(c_1, c_2 - 1) - B_{t-1}(c_1, c_2 - 1)]\lambda_2(p_1) \\ &\quad + [B_t(c_1, c_2) - B_{t-1}(c_1, c_2)](1 - \lambda_1(p_1) - \lambda_2(p_1)) \\ B_{t+1}(c_1, c_2) - B_t(c_1, c_2) &\geq [B_t(c_1 - 1, c_2) - B_{t-1}(c_1 - 1, c_2)]\lambda_1(p_2) \\ &\quad + [B_t(c_1, c_2 - 1) - B_{t-1}(c_1, c_2 - 1)]\lambda_2(p_2) \\ &\quad + [B_t(c_1, c_2) - B_{t-1}(c_1, c_2)](1 - \lambda_1(p_2) - \lambda_2(p_2)) \end{aligned}$$

¹tanto en el nivel de inventario de la tienda 1 como en el de la 2. La condición descrita en la proposición está expresada en términos del inventario de la tienda 1

Por lo tanto, restando adecuadamente las expresiones anteriores, se tiene que:

$$0 \leq [(B_{t-1}(c_1, c_2) - B_{t-1}(c_1 - 1, c_2)) - (B_t(c_1, c_2) - B_t(c_1 - 1, c_2))](\lambda_1(p_1) - \lambda_1(p_2)) \quad [1]$$

$$+ [(B_{t-1}(c_1, c_2) - B_{t-1}(c_1, c_2 - 1)) - (B_t(c_1, c_2) - B_t(c_1, c_2 - 1))](\lambda_2(p_1) - \lambda_2(p_2)) \quad [2]$$

Ahora bien, usando la condición que debe satisfacer la función de beneficio, en términos del inventario de la tienda 1, en $t - 1$, $c_1 - 1$, c_2 se tiene que la expresión [1], salvo por $[\lambda_1(p_1) - \lambda_1(p_2)]$, es negativa, análogamente usando la condición en el nivel de inventario de la tienda 2, en $t - 1$, c_1 , $c_2 - 1$ se tiene que la expresión [2], salvo por $[\lambda_2(p_1) - \lambda_2(p_2)]$, es negativa. Además se cumple que $\lambda_1(p_1) - \lambda_1(p_2) \geq 0$ si y sólo si $\lambda_2(p_1) - \lambda_2(p_2) \geq 0$ Por lo tanto, para que la desigualdad se satisfaga es necesario y suficiente que $\lambda_1(p_1) - \lambda_1(p_2) \leq 0$, es decir, $(1 - F_1(p_1))$ tiene que ser menor o igual a $(1 - F_1(p_2))$. Luego, como la función de distribución $F_1(p)$ es monótonamente creciente se tiene que p_1 es mayor o igual a p_2 , con lo cual el resultado queda probado. ■

Proposición 21 *Si la función de beneficio satisface las siguientes condiciones*

- $\forall c_2 \geq 0$ y $\forall c_1 < t$

$$B_t(c_1 + 1, c_2) - B_t(c_1, c_2) > B_t(c_1 + 2, c_2) - B_t(c_1 + 1, c_2)$$

- $\forall c_1 < t$ y $\forall c_2 < t$

$$B_t(c_1 + 1, c_2) - B_t(c_1, c_2) > B_t(c_1 + 1, c_2 + 1) - B_t(c_1, c_2 + 1)$$

entonces, para un periodo dado, el precio óptimo es no creciente con el nivel de inventario de una tienda, siempre que este no sea nulo, es decir:

$$p_t(c_1, c_2) \geq p_t(c_1 + 1, c_2) \forall c_1, c_2 \quad c_1 \neq 0$$

Demostración:

Nuevamente, si c_2 es cero, es equivalente al caso de una tienda, en cuyo caso el resultado está demostrado *Bitran y Mondschein (1993)*.

Sea p_1 y p_2 los precios óptimos para $B_t(c_1 + 1, c_2)$ y $B_t(c_1, c_2)$ respectivamente. Por lo tanto se tendrá que:

$$\begin{aligned}
 B_t(c_1 + 1, c_2) - B_t(c_1, c_2) &\leq [B_{t-1}(c_1, c_2) - B_{t-1}(c_1 - 1, c_2)]\lambda_1(p_1) \\
 &\quad + [B_{t-1}(c_1 + 1, c_2 - 1) - B_{t-1}(c_1, c_2 - 1)]\lambda_2(p_1) \\
 &\quad + [B_{t-1}(c_1 + 1, c_2) - B_{t-1}(c_1, c_2)](1 - \lambda_1(p_1) - \lambda_2(p_1)) \\
 B_t(c_1 + 1, c_2) - B_t(c_1, c_2) &\geq [B_{t-1}(c_1, c_2) - B_{t-1}(c_1 - 1, c_2)]\lambda_1(p_2) \\
 &\quad + [B_{t-1}(c_1 + 1, c_2 - 1) - B_{t-1}(c_1, c_2 - 1)]\lambda_2(p_2) \\
 &\quad + [B_{t-1}(c_1 + 1, c_2) - B_{t-1}(c_1, c_2)](1 - \lambda_1(p_2) - \lambda_2(p_2))
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, restando adecuadamente las expresiones anteriores, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq [(B_{t-1}(c_1, c_2) - B_{t-1}(c_1 - 1, c_2)) - (B_{t-1}(c_1 + 1, c_2) - B_{t-1}(c_1, c_2))](\lambda_1(p_1) - \lambda_1(p_2)) \quad [1] \\
 &\quad + [(B_{t-1}(c_1 + 1, c_2 - 1) - B_{t-1}(c_1, c_2 - 1)) - (B_{t-1}(c_1 + 1, c_2) - B_{t-1}(c_1, c_2))](\lambda_2(p_1) - \lambda_2(p_2)) \quad [2]
 \end{aligned}$$

Usando la primera condición en $t - 1$, $c_1 - 1$, c_2 , se tiene que la expresión [1], salvo por $[\lambda_1(p_1) - \lambda_1(p_2)]$ es positiva. Además, usando la segunda condición en $t - 1$, c_1 , $c_2 - 1$, se tiene que la expresión [2], salvo por $[\lambda_2(p_1) - \lambda_2(p_2)]$ es positiva. Luego, usando un argumento similar al utilizado en la demostración anterior se tendrá que p_1 es menor o igual p_2 , con lo cual el resultado está demostrado. ■

Chapter 9

ANEXO III

9.1 PARTE A: RESULTADOS PRELIMINARES

9.1.1 Suma

Sean a y b dos reales medidos con cierta incerteza representada por errores absolutos Δa y Δb respectivamente. Entonces, se tiene que el error para $a + b$ viene dado por:

$$\Delta(a + b) = \Delta a + \Delta b \quad (9.1)$$

Demostración

Sean a_1 y b_1 los valores estimados de a y b respectivamente y a_2 y b_2 los valores reales de a y b respectivamente, con lo cual el error absoluto para a (Δa) es $a_2 - a_1$ y para b (Δb) $b_2 - b_1$. El error absoluto de $a + b$ ($\Delta(a + b)$) es:

$$\Delta(a + b) = (a + b)_2 - (a + b)_1 = (a_2 + b_2) - (a_1 + b_1) = (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1) = \Delta a + \Delta b$$

9.1.2 Multiplicación

$$\Delta(ab) = b\Delta a + a\Delta b + \Delta a\Delta b \quad (9.2)$$

Demostración

Sean a_1 y b_1 los valores estimados de a y b respectivamente y a_2 y b_2 los valores reales de a y b respectivamente, con lo cual el error absoluto para a (Δa) es $a_2 - a_1$ y para b (Δb) $b_2 - b_1$. El error absoluto de ab ($\Delta(ab)$) es:

$$\begin{aligned}\Delta(ab) &= (ab)_2 - (ab)_1 = (a_2b_2) - (a_1b_1) = (a_2 - a_1)b_1 + (b_2 - b_1)a_1 - (a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \\ \Delta(ab) &= b_1\Delta(a) + a_1\Delta(b) + \Delta(a)\Delta(b)\end{aligned}$$

■

9.2 PARTE B1

Mientras mayor es la disponibilidad a pagar por parte de los clientes mayor beneficio adicional provoca una unidad extra de inventario.

$$B_n^V(c) - B_n^V(c-1) \leq B_n(c) - B_n(c-1) \quad (9.3)$$

Demostración

Para verificar la propiedad anterior es necesario observar que el incremento en el inventario de la tienda se traducirá en un beneficio por venta en la medida que la unidad adicional sea vendida. Por lo tanto, como en el modelo estimado ($B_n(c)$) los clientes tienen un mayor precio de reserva que en el caso real ($B_n^V(c)$) la venta es más segura en el primer caso en relación al segundo, de donde se deduce el resultado (9.3). Es importante notar que las funciones $B_n^V(c)$ se evalúan en el precio óptimo de $B_n(c)$. ■

9.3 PARTE B2

El error absoluto de $B_n(c)$ es de acuerdo a (3.13):

$$\begin{aligned}\Delta B_n(c) &= -[B_n(c) - B_{n-1}(c)] \frac{\Delta F(p_n^c)}{1 - F(p_n^c)} + \\ &\quad \Delta B_{n-1}(c-1)(1 - F^V(p_n^c)) + \\ &\quad \Delta B_{n-1}(c)(F_V(p_n^c))\end{aligned} \quad (9.4)$$

luego reordenando los términos se tiene que:

$$\begin{aligned}-[\Delta B_n(c) - \Delta B_{n-1}(c)] &= [B_n(c) - B_{n-1}(c)] \frac{\Delta F(p_n^c)}{1 - F(p_n^c)} + \\ &\quad [\Delta B_{n-1}(c) - \Delta B_{n-1}(c-1)](1 - F^V(p_n^c))\end{aligned} \quad (9.5)$$

además, usando el resultado de (9.3) se tiene que $\Delta B_{n-1}(c) - \Delta B_{n-1}(c-1) \leq 0$ con lo cual es posible acotar la expresión (9.5) por:

$$-[\Delta B_n(c) - \Delta B_{n-1}(c)] \leq [B_n(c) - B_{n-1}(c)] \frac{\Delta F(p_n^c)}{1 - F(p_n^c)} \quad (9.6)$$

Ahora bien, sumando la expresión (9.6) desde $n = 1$ hasta k y reemplazando $\frac{\Delta F(p_n^c)}{1 - F(p_n^c)}$ por $x_1(p_n^c)$ se tiene:

$$\sum_{n=1}^k -[\Delta B_n(c) - \Delta B_{n-1}(c)] \leq \sum_{n=1}^k \{[B_n(c) - B_{n-1}(c)] x_1(p_n^c)\} \quad (9.7)$$

observando que p_k^c es mayor que $p_n^c \forall n \leq k$ se tiene que $x_1(p_n^c)$ es mayor que $p_k^c \forall k \leq n$, con lo cual es posible extender la cota reemplazando cada p_n^c por p_k^c , además desarrollando las sumas telescópicas que se forman se tiene:

$$-\Delta B_n(c) \leq B_n(c) x_1(p_n^c) \quad (9.8)$$

En la expresión anterior el signo menos que acompaña a $\Delta B_n(c)$ se justifica pues al ser $\Delta B_n(c)$ negativa interesa una cota superior para $-\Delta B_n(c)$. El valor absoluto del error porcentual de $B_n(c)$ se calcula como el cuociente entre $-\Delta B_n(c)$ y $B_n(c)$. Por lo tanto, de (9.8) se tiene:

$$-\frac{\Delta B_n(c)}{B_n(c)} \leq x_1(p_n^c) = \frac{F(p_n^c)}{1 - F(p_n^c)} x \quad (9.9)$$

que es lo que se quería probar. ■

Chapter 10

ANEXO IV

10.1 PARTE A

A continuación se demuestra la proposición (8) . Intereza probar que el precio es decreciente con el inventario para el caso de una tienda y un sólo periodo (Modelo de Precio Constante).

Proposición:

Si $p_1(c)$ es el precio óptimo con un nivel de inventario c , se tiene que $p_1(c)$ satisface:

$$p_1(c) \geq p_1(c + 1) \quad \forall c \geq 1 \quad (10.1)$$

Demostración:

Como primer paso, no es difícil probar, a partir de la definición de $V_1(c, p)$, esta puede reescribirse como:

$$V_1(c, p) = p[c - \sum_{k=0}^c ((c - k) Prob(D_1(p) = k))] \quad (10.2)$$

Por lo tanto, la condición de primer orden para la maximización de $V_1(c, p)$ es:

$$c - \sum_{k=0}^c ((c - k) Prob(D_1(p) = k)) - p \sum_{k=0}^c ((c - k) \frac{dProb(D_1(p) = k)}{dp}) \quad (10.3)$$

Además, como la demanda tiene una distribución Poisson de parámetro $\lambda(p) = \lambda T_1(1 - F(p))$ se tiene que $\frac{dProb(D_1(p)=k)}{dp}$ es igual a:

$$\lambda T_1 f(p) Prob(D_1(p) = 0) \quad k = 0 \quad (10.4)$$

$$\lambda T_1 f(p) [Prob(D_1(p) = k) - Prob(D_1(p) = k - 1)] \quad k \geq 1 \quad (10.5)$$

Reemplazando estas expresiones en la ecuación (10.3) y desarrollando, se tiene que el precio óptimo debe satisfacer:

$$\left[c - \sum_{k=0}^c ((c-k) \text{Prob}(D_1(p) = k)) - \lambda T_1 f(p) p \sum_{k=0}^{c-1} (\text{Prob}(D_1(p) = k)) \right] = 0 \quad (10.6)$$

De esta última expresión es claro que $p_1(c)$ debe cumplir que:

$$\lambda T_1 p_1(c) f(p_1(c)) = \frac{c - \sum_{k=0}^c ((c-k) \text{Prob}(D_1(p_1^c) = k))}{\sum_{k=0}^{c-1} (\text{Prob}(D_1(p_1^c) = k))} = A_c(p_1(c)) \quad (10.7)$$

En la ecuación anterior se ha introducido con el objeto de simplificar la notación la función $A_c(p)$ como:

$$A_c(p) = \frac{c - \sum_{k=0}^c ((c-k) \text{Prob}(D_1(p) = k))}{\sum_{k=0}^{c-1} (\text{Prob}(D_1(p) = k))} \quad (10.8)$$

Conviene hacer notar que $A_c(p)$ es una abreviación para $A_c(\lambda T_1(1 - F(p)))$, es decir, $A_c()$ más que ser una función exclusiva del precio, es un función de la tasa de compra.

Resultado 1:

Para todo c , $A_c(p)$ es decreciente con p .

Demostración:

Para demostrar el resultado 1, sin entrar en detalles algebraicos, basta observar que la probabilidad para un cliente que llega a la tienda de comprar el bien ($1 - F(p)$) es decreciente con el precio. Por lo tanto, la probabilidad de vender menos de $c - 1$ unidades aumenta al aumentar el precio, es decir:

$$\frac{d \sum_{k=0}^{c-1} (\text{Prob}(D_1(p) = k))}{dp} \geq 0 \quad (10.9)$$

Además, el número esperado de unidades vendidas disminuirá al aumentar el precio, es decir:

$$\frac{d [c - \sum_{k=0}^c ((c-k) \text{Prob}(D_1(p) = k))]}{dp} \leq 0 \quad (10.10)$$

Por lo tanto, como $A_c(p)$ es el cuociente entre el número esperado de unidades vendidas y la probabilidad que las ventas sean menores o iguales a $c - 1$, se tiene por (10.9) y (10.10) que $A_c(p)$ es decreciente con el precio. ■

Resultado 2:

$\forall p \geq 0$ y $\forall \lambda \geq 0$, la sucesión $A_c(p)$ es decreciente con c .

$$A_c(p) \geq A_{c+1}(p) \quad \forall p \geq 0, \forall \lambda \geq 0 \quad (10.11)$$

Demostración:

Para demostrar el Resultado 2, se utilizará el siguiente resultado previo:

Resultado Previo:

Si existe $\hat{p} \geq 0$ tal que $A_c(\hat{p}) > A_{c+1}(\hat{p}) \quad \forall \lambda > 0$ entonces $A_c(p) > A_{c+1}(p) \quad \forall p \geq 0 \quad \forall \lambda > 0$.

Prueba:

Sea $p \neq \hat{p}$. Por demostrar que $A_c(p) \geq A_{c+1}(p)$ o lo que es lo mismo $A_c(\lambda T_1(1 - F(p))) \geq A_{c+1}(\lambda T_1(1 - F(p)))$.

En efecto, $\lambda T_1(1 - F(p)) = (1 - F(\hat{p}))\lambda T_1 \frac{1-F(p)}{1-F(\hat{p})}$. Por lo tanto, considerando $\lambda' = \lambda \frac{1-F(p)}{1-F(\hat{p})}$ se tendrá que $\lambda T_1(1 - F(p)) = \lambda' T_1(1 - F(\hat{p}))$. Luego por hipótesis se tiene que $A_c(\lambda' T_1(1 - F(\hat{p}))) \geq A_{c+1}(\lambda' T_1(1 - F(\hat{p})))$ con lo cual el resultado previo queda probado. ■

Por el resultado previo anterior, bastará encontrar algún p mayor o igual a 0, tal que $A_c(p) \geq A_{c+1}(p)$ para todo natural c y para toda tasa de llegada a la tienda $\lambda \geq 0$.

A continuación se demostrará que $p = 0$ satisface las condiciones anteriores.

Para simplificar la notación, se anotará $A_c(p = 0) = A_c$, y $Pr(D_1(p = 0) = k)$ como $Pr(k)$. Lo que se busca probar es entonces que $A_c \geq A_{c+1}$ para toda tasa $\lambda \geq 0$ y para todo nivel de inventario c positivo.

Como primer paso, nótese que:

$$\begin{aligned} A_{c+1} &= \frac{c + 1 - \sum_{k=0}^c [(c + 1 - k) Pr(k)]}{\sum_{k=0}^c Pr(k)} \\ &= A_c \sum_{k=0}^{c-1} [Pr(k)] + 1 - \sum_{k=0}^c [Pr(k)] \end{aligned} \quad (10.12)$$

es decir,

$$A_{c+1} \sum_{k=0}^c [Pr(k)] = A_c \sum_{k=0}^{c-1} [Pr(k)] + 1 - \sum_{k=0}^c [Pr(k)] \quad (10.13)$$

Definiendo $b_c = A_c \sum_{k=0}^{c-1} [Pr(k)]$ y $u_c = 1 - \sum_{k=0}^c [Pr(k)]$ se tiene que (10.13) puede escribirse como:

$$b_{c+1} = b_c + u_c \quad (10.14)$$

No es difícil mostrar de (10.14) que

$$b_{c+1} = \sum_{k=0}^c [u_k] \quad (10.15)$$

Por otro lado, de (10.13) y (10.15) se tiene que

$$(A_{c+1} - A_c) \sum_{k=0}^c [Pr(k)] = u_c - A_c Pr(c) \quad (10.16)$$

y que

$$A_c = \frac{b_c}{\sum_{k=0}^{c-1} [Pr(k)]} = \frac{\sum_{k=0}^{c-1} [u_k]}{\sum_{k=0}^{c-1} [Pr(k)]} \quad (10.17)$$

Combinado (10.16) y (10.17) se tiene

$$(A_{c+1} - A_c) \sum_{k=0}^c [Pr(k)] = u_c - \frac{\sum_{k=0}^{c-1} [u_k]}{\sum_{k=0}^{c-1} [Pr(k)]} Pr(c) \quad (10.18)$$

Por lo tanto, demostrar que $A_{c+1} \leq A_c$ es equivalente a probar que:

$$u_c - \frac{\sum_{k=0}^{c-1} [u_k]}{\sum_{k=0}^{c-1} [Pr(k)]} Pr(c) \leq 0 \quad (10.19)$$

Definiendo W_c como el cociente entre u_c y $Pr(c)$ se tiene que la condición (10.19) es equivalente a:

$$W_c \leq \frac{\sum_{k=0}^{c-1} [W_k Pr(k)]}{\sum_{k=0}^{c-1} [Pr(k)]} \quad (10.20)$$

El lado derecho de la desigualdad (10.20) corresponde al promedio de los $\{W_k\}_{k=0}^{c-1}$ ponderados por los $Pr(k)$, sea este promedio W^* , se tendrá entonces por propiedad del promedio ponderado por coeficientes positivos que $\min_{0 \leq k \leq c-1} [W_k] \leq W^* \leq \max_{0 \leq k \leq c-1} [W_k]$.

Luego si es posible probar que los W_k son decrecientes la desigualdad (10.20) quedará probada y con ello el resultado, pues si los W_k son decrecientes se tendrá que $W_c \leq W_{c-1} \leq W^*$.

Para probar el decrecimiento de los W_k se debe notar que $W_c Pr(c) = u_c$ y que $u_{c-1} - u_c = Pr(c)$ por lo que

$$W_{c-1} Pr(c-1) - W_c Pr(c) = Pr(c) \quad (10.21)$$

Además, por la forma de los de los $Pr(c)$, se tiene

$$Pr(c-1) = \frac{c}{\lambda} Pr(c) \quad (10.22)$$

Reemplazando (10.22) en (10.21) y reordenando se obtiene

$$(W_{c-1} - W_c) = 1 - W_{c-1} \left(\frac{c}{\lambda} - 1 \right) \quad (10.23)$$

Es claro de (10.23) que la condición de W_k decrecientes equivale a

$$1 \geq W_{c-1} \left(\frac{c}{\lambda} - 1 \right) \quad (10.24)$$

Luego de las definiciones de W_k y u_k lo que se debería probar es que

$$1 \geq \frac{1 - \sum_{k=0}^{c-1} [Pr(k)]}{Pr(c-1)} \left(\frac{c}{\lambda} - 1 \right) \quad (10.25)$$

es decir,

$$Pr(c-1) \geq \frac{c}{\lambda} \left(1 - \sum_{k=0}^{c-1} [Pr(k)] \right) - \left(1 - \sum_{k=0}^{c-2} [Pr(k)] \right) + Pr(c-1) \quad (10.26)$$

o bien

$$0 \geq \frac{c}{\lambda} \sum_{k=c}^{\infty} [Pr(k)] - \sum_{k=c-1}^{\infty} [Pr(k)] \quad (10.27)$$

$$0 \geq \sum_{k=c-1}^{\infty} \left[\left(\frac{(\lambda T_1)^k e^{-\lambda T_1}}{k!} \right) \left(\frac{c}{k+1} - 1 \right) \right] \quad (10.28)$$

Ahora bien como se tiene que

$$\frac{c}{k+1} - 1 \leq 0 \quad \forall k \geq c-1 \quad (10.29)$$

la expresión (10.28) se cumple para todo c , con lo cual se demuestra el decrecimiento de los W_k y por lo tanto el Resultado 2 queda demostrado. ■

Finalmente, a partir de los resultados 1 y 2 la demostración que el precio óptimo para el modelo de un periodo es decreciente con el inventario es relativamente directa.

En efecto, sea p_1^c el precio óptimo cuando el inventario es c . Por la condición (10.7) p_1^c es solución de la ecuación $T_1 \lambda p f(p) = A_c(p)$ es decir, $T_1 \lambda p_1^c f(p_1^c) = A_c(p_1^c)$, luego por el Resultado 2 se tiene que $T_1 \lambda f(p_1^c) \geq A_{c+1}(p_1^c)$ además como $0f(0) = 0$ se tiene que $T_1 \lambda 0f(0) \leq A_{c+1}(0)$.

Por lo tanto de las dos condiciones anteriores y utilizando el hecho que todas las funciones consideradas son continuas, existe un precio p^* tal que $0 \leq p^* \leq p_1^c$ tal que $T_1 \lambda p^* f(p^*) = A_{c+1}(p^*)$ es decir, p^* satisface la condición de optimalidad para el caso de un inventario de $c + 1$ y recordando que las funciones de beneficios son pseudoconcavas se concluye que $p_1^{c+1} = p^* \leq p_1^c$. ■

10.2 PARTE B

En esta sección se demuestra que el precio óptimo para el modelo de precio constante para una tienda está acotado .

Para todo nivel de inventario c y para toda duración del periodo de venta $T_1 \geq 0$ el precio óptimo p_1^c está acotado, inferiormente por p_{min} , y superiormente por p_{max} soluciones de las ecuaciones:

$$p_{min} = \frac{1 - F(p_{min})}{f(p_{min})}$$

$$p_{max} = \frac{\exp^{-\lambda T_1(1-F(p))} - 1}{\lambda T_1 f(p)}$$

Demostración:

A partir del resultado demostrado en la parte anterior, el precio óptimo es decreciente con el inventario, por lo tanto como $p_1^{c+1} \leq p_1^c$ y $p_1^c \geq 0$ la sucesión de los p_1^c es decreciente y acotada, por tanto convergente, además su límite corresponde a la mayor cota inferior de la sucesión. Si c tiende a infinito, la expresión para el beneficio es:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} V_1(c, p) = p \lambda T_1 (1 - F(p)) \quad (10.30)$$

Por lo tanto de (10.30) se tiene que el precio óptimo cuando c tiende a infinito p_1^∞ se determina resolviendo la ecuación:

$$(1 - F(p)) - p f(p) = 0 \quad (10.31)$$

Además, si la función de distribución para el precio de reserva admite momento centrado de segundo orden se tendrá que $p^2 f(p)$ tiende a 0 cuando p tiende a infinito y por tanto la función de beneficio de (10.30) tiende a 0 cuando p tiende a infinito.

Por otro lado, para una duración T_1 y una tasa de llegada λ dados, el mayor precio se alcanza para un nivel de inventario de $c = 1$. La función de beneficio en este caso es:

$$V_1(1, p) = p(1 - \exp -\lambda T_1(1 - F(p))) \quad (10.32)$$

de donde, el precio que optimiza $V_1(1, p)$ p_1^1 se obtiene resolviendo la ecuación:

$$p = \frac{\exp -\lambda T_1(1 - F(p)) - 1}{\lambda T_1 f(p)} \quad (10.33)$$

En este caso la condición de existencia para el momento centrado de segundo orden también asegura que la función de beneficio de (10.32) tiende a 0 si p tiende a infinito. ■

10.3 PARTE C

Si $p_1^c(T_1)$ representa el precio óptimo cuando el inventario inicial es c y la duración del periodo de venta es T_1 entonces se cumple que:

$$p_1^c(T_1) \geq p_1^c(T_1') \quad T_1 \geq T_1'$$

Demostración

Para simplificar la demostración consideraremos que el tiempo puede ser tratada como una variable discreta de tal forma de permitir una demostración inductiva para la proposición anterior. Supongamos entonces que T es una variable natural $T = 0, 1, 2, 3, \dots$

La primera consideración tiene relación con la forma de expresar la función de beneficio $V_1(c, p, T)$. No es difícil probar que:

$$V_1(c, p, T) = V_1(c, p, T_2) + \sum_{k=0}^c V_1(c - k, p, T_1) \cdot Prob(D_2(p) = k) \quad (10.34)$$

donde $T = T_1 + T_2$.

Junto con lo anterior es necesario revisar el valor del precio óptimo cuando $T = 0$. Claramente para $T = 0$ el beneficio es cero independiente del nivel de precio cobrado, además recordando el modelo de tiempo continuo para una tienda si se dispone de un único periodo de duración Δt para la venta entonces el precio óptimo en este caso es solución de

$$p_1^c(\Delta t) = \frac{1 - F(p_1^c(\Delta t))}{f(p_1^c(\Delta t))} \quad (10.35)$$

es decir, coincide con la cota inferior del precio determinada anteriormente.

A partir de estos resultados y con objeto de entregar un comportamiento continuo para el nivel de precio consideraremos que $p_1^c(0) = p_1^{min}$.

Ahora bien, para demostrar la propiedad anterior se utilizará inducción sobre T con $c \geq 1$. Dado el tratamiento discreto para la duración del periodo de venta se probará que $p_1^c(T) \leq p_1^c(T + 1)$.

- Para $k = 1$ se tiene $T = 1$.

Como se expuso anteriormente $p_1^c(0) = p_1^{min}$ que corresponde a la cota inferior del precio y por tanto $p_1^c(1) \geq p_1^{min} = p_1^c(0)$, con lo cual la proposición es válida para $k = 1$.

- Supongamos válida la propiedad hasta algún $k < T$.
- Se demuestra para $k = T$.

Por (10.34) se tiene que

$$\begin{aligned} V_1(c, p, T - 1) &= V_1(c, p, T_2) + \sum_{k=0}^c V_1(c - k, p, T_1) \cdot Prob(D_2(p) = k) \\ V_1(c, p, T) &= V_1(c, p, T_2) + \sum_{k=0}^c V_1(c - k, p, T_1 + 1) \cdot Prob(D_2(p) = k) \\ T - 1 &= T_2 + T_1 \end{aligned} \tag{10.36}$$

Tomando $T_2 \geq 1$ se tiene que $T_1 < T$ por lo tanto usando la hipótesis inductiva se tiene que los términos $V_1(c - k, p, T_1 + 1)$ se maximizan para valores de p mayores que los términos $V_1(c - k, p, T_1)$ y por tanto $p_1^c(T) \geq p_1^c(T - 1)$ que es lo que se quería probar.

+

■

10.4 PARTE D

Si $p_1^c(T_1)$ representa el precio óptimo cuando el inventario inicial es c y la duración del periodo de venta es T_1 entonces se cumple que:

$$\lim_{T_1 \rightarrow \infty} p_1^c(T_1) \rightarrow \infty$$

Demostración Si el horizonte de venta tiende a infinito entonces la probabilidad de vender todo el inventario inicial tiende a 1 para todo p y por tanto en el límite se tiene que:

$$\lim_{T_1 \rightarrow \infty} V_1(c, p, T_1) = pc \quad (10.37)$$

y por tanto y por tanto el precio óptimo diverge cuando T_1 tiende a infinito. ■

10.5 PARTE E

Proposición

La función de beneficio es “concava” en el nivel de inventario.

$$V_1(c) - V_1(c - 1) \geq V_1(c + 1) - V_1(c)$$

Demostración

Para simplificar la demostración de la proposición, se asumirá que el inventario puede ser tratado como una variable continua, con lo cual la condición a demostrar será:

$$\frac{d^2 V_1(c)}{dc^2} \leq 0 \quad (10.38)$$

Con la consideración anterior la función de demanda puede también ser tratada como continua. Sea $f_D(k, p)$ la función de densidad para la demanda. Con esto la función de beneficio $V_1(c, p)$ puede escribirse como:

$$V_1(c, p) = p \left[c - \int_0^c (c - k) f_D(k, p) dk \right] \quad (10.39)$$

si p_1 es el precio que maximiza (10.39) se cumple que:

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(c, p_1)}{dc} &= \frac{\partial V_1(c, p_1)}{\partial p_1} \frac{dp_1}{dc} + \frac{\partial V_1(c, p_1)}{\partial c} \\ &= \frac{\partial V_1(c, p_1)}{\partial c} \\ &= p_1 \left[1 - \int_0^c f_D(k, p_1) dk \right] \end{aligned} \quad (10.40)$$

por lo tanto se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V_1(c)}{dp^2} &= \frac{\partial}{\partial p_1} \frac{\partial V_1(c, p_1)}{\partial c} \frac{dp_1}{dc} + \frac{\partial^2}{\partial c^2} V_1(c, p_1) \\ &= \left[1 - \int_0^c f_D(k, p_1) dk \right] \frac{dp_1}{dc} - p_1 \int_0^c \frac{df_D(k, p_1)}{dp_1} dk - p_1 f_D(c, p_1) \end{aligned} \quad (10.41)$$

Ahora bien, ya se demostró que el precio óptimo es decreciente con el inventario es decir $\frac{dp_1}{dc} \leq 0$. Además, el término $\int_0^c \frac{df_D(k,p_1)}{dp_1} dk$ es positivo, para ver esto basta observar que lo que representa es la derivada con respecto al precio de $F_D(c)$, es decir, de la probabilidad que la demanda sea menor que c , la que claramente decreciente con el precio. De esta forma, los tres sumandos de la ecuación anterior son negativos y por lo tanto la proposición queda demostrada. ■

10.6 PARTE F

Proposición

El máximo beneficio esperado para el modelo de un periodo ($V_1(c)$) es menor que el máximo beneficio esperado para el modelo de dos subperiodos ($V_2(c)$) para horizontes de venta iguales.

$$V_2(c) \geq V_1(c) \quad \forall c \geq 0$$

Demostración

Para demostrar la proposición anterior basta observar que el beneficio máximo esperado en el caso de un sólo periodo ($V_1(c)$) puede obtenerse en el caso de dos subperiodos imponiéndole a este último la restricción de cobrar el mismo precio durante los dos subperiodos. Además, claramente el beneficio para el modelo de dos subperiodos sin restricción es mayor que el beneficio para el modelo de dos subperiodos con la restricción anterior. De estos dos hechos el resultado de la proposición anterior es inmediato. ■

10.7 PARTE G

Proposición

Si $p_2(c)$ es el precio óptimo de (4.17) y $p_1(c)$ es el precio óptimo de (4.18) entonces se cumple que:

$$p_2(c) \geq p_1(c) \quad \forall c \geq 0$$

Demostración

Para demostrar la proposición anterior tomemos la ecuación (4.18):

$$V_1(c, p, H) = V_1(c, p, T_2) + \sum_{k=0}^c V_1(c-k, p, T_1) Prob(D_2(p) = k)$$

cuyo precio óptimo es $p_1(c)$. Utilizando un resultado anterior, como $H \geq T_1$, $p_1(c)$ es mayor que el precio óptimo para $V_1(c, p, T_1), V_1(c-1, p, T_1), \dots, V_1(c-s, p, T_1)$ algún $0 \leq s \leq c$ y por tanto los términos anteriores se oponen al crecimiento de $p_1(c)$, luego

$$V_1(c, p, T_2) + \sum_{k=0}^s V_1(c-k, T_1) Prob(D_2(p) = k) + \sum_{k=s+1}^c V_1(c-k, p, T_1) Prob(D_2(p) = k) \quad (10.42)$$

alcanzará su máximo en $\hat{p} \geq p_1(c)$ pues al eliminar la dependencia de $V_1(c, p, T_1), V_1(c-1, p, T_1), \dots, V_1(c-s, p, T_1)$ con el precio se elimina un impedimento al crecimiento de $p_1(c)$. Por lo tanto al relajar la dependencia con el precio de los $V_1(c-k, p, T_1)$ el precio óptimo aumenta y por tanto se cumplirá entonces que $p_2(c)$ (precio óptimo todos los $V_1(c-k, p, T_1)$ son independientes del precio) es mayor que $p_1(c)$. ■

10.8 PARTE H

Proposición

Si $p_2(c)$ representa al precio óptimo a cobrar en el periodo inicial para el modelo de dos subperiodos con un inventario inicial de c , entonces se cumple que:

$$p_2(c) \geq p_2(c+1) \quad \forall c \geq 0$$

Demostración

Para demostrar la proposición anterior consideremos las funciones de beneficio para los niveles de inventarios de $c+1$ y c , es decir, $V_2(c+1, p)$ y $V_2(c, p)$.

$$\begin{aligned} V_2(c+1, p) &= V_1(c+1, p, T_2) + \sum_{k=0}^c V_1(c+1-k, T_1) Prob(D_2(p) = k) \\ &= V_1(c, p) + p Prob(D_2(p) > c) + \sum_{k=0}^c V_1(c+1-k, T_1) Prob(D_2(p) = k) \\ V_2(c, p) &= V_1(c, p, T_2) + \sum_{k=0}^c V_1(c-k, T_1) Prob(D_2(p) = k) \end{aligned} \quad (10.43)$$

Tomando la diferencia entre $V_2(c+1, p)$ y $V_2(c, p)$ y derivando con respecto al precio se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d(V_2(c+1, p) - V_2(c, p))}{dp} &= \frac{d}{dp} [pPr ob(D_2(p) > c)] \\ &+ \sum_{k=0}^c [V_1(c+1-k, T_1) - V_1(c-k, T_1)] \frac{d(Pr ob(D_2(p)=k))}{dp} \end{aligned} \quad (10.44)$$

Lo primero que debe observarse es que el término $V_1(c+1-k, T_1) - V_1(c-k, T_1)$ es creciente con k pues como ya fue visto la función $V_1(c, T_1)$ es concava en el inventario. Además, $\frac{d(Pr ob(D_2(p)=k))}{dp}$ aumenta para valores pequeños de k y disminuye para valores altos de k . Por lo tanto, combinando estos dos resultados la sumatoria en la ecuación anterior es negativa.

El siguiente paso es demostrar que $\frac{d}{dp} [pPr ob(D_2(p) > c)] \leq 0$ en $p = p_2(c)$. Para ver esto consideremos la expresión:

$$V_1(c+1, p, T_2) = V_1(c, p, T_2) + pPr ob(D_2(p) > c) \quad (10.45)$$

Si \hat{p} es el precio óptimo para $V_1(c, p, T_2)$ entonces se tiene que:

$$\frac{d(V_1(c, \hat{p}, T_2))}{dp} = 0$$

además, el precio óptimo es decreciente con el inventario es decir:

$$\frac{d(V_1(c+1, \hat{p}, T_2))}{dp} < 0$$

por lo tanto los resultados anteriores permiten asegurar que:

$$\frac{d}{dp} [\hat{p}Pr ob(D_2(\hat{p}) > c)] \leq 0$$

Ahora bien, dados los supuestos que existen para la función de demanda la expresión $pPr ob(D_2(p) > c)$ es seudocancava en el precio y por lo tanto se tendrá que:

$$\frac{d}{dp} [pPr ob(D_2(p) > c)] \leq 0 \quad \forall p \geq \hat{p}$$

En particular $p_2(c) \geq \hat{p}$ con lo cual que probado que $\frac{d}{dp}[p \text{Prob}(D_2(p) > c)] \leq 0$ en $p = p_2(c)$.

De los resultados anteriores queda entonces claro que

$$\frac{d(V_2(c+1, p_2(c)) - V_2(c, p_2(c)))}{dp} \leq 0$$

y por tanto asumiendo comportamiento pseudoconcavo para $V_2(c+1, p)$ se tendrá que necesariamente $p_2(c+1) \leq p_2(c)$. ■

10.9 PARTE I

Proposición

$$p_2^{min} = \frac{1 - F(p_2^{min})}{f(p_2^{min})}$$

$$p_2^{max} = V_1(1, T_1) + \frac{e^{\lambda T_2(1 - F(p_2^{max}))} - 1}{\lambda T_2 f(p_2^{max})}$$

Demostración

El precio p_2^{min} se determina buscando el valor óptimo de:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} V_2(c, p) = \lim_{c \rightarrow \infty} V_1(c, p, T_2) + \lim_{c \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^c [V_1(c-k)] \text{Prob}(D_2(p) = k) \quad (10.46)$$

Para demostrar el resultado bastará probar que el término

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^c [V_1(c-k)] \text{Prob}(D_2(p) = k)$$

es independiente de p , se demostrará que el límite anterior es constante y vale $V_1(\infty, T_1)$ que corresponde a la cota superior de $V_1(c, T_1)$.

En efecto, dado $\epsilon_1 > 0$ siempre existe s natural tal que:

$$\sum_{k=s}^{\infty} \text{Prob}(D_2(p) = k) \leq \epsilon_1 \quad (10.47)$$

Por otro lado, dado ϵ_2 existe \hat{c} suficientemente grande tal que:

$$V_1(\infty, T_1) - V_1(\hat{c} - k, T_1) < \epsilon_2 \quad \forall 0 \leq k \leq s \quad (10.48)$$

luego $\forall c \geq \hat{c}$ se cumple que:

$$\begin{aligned} V_1(\infty, T_1) &= \sum_{k=0}^c [V_1(c - k, T_1)] Prob(D_2(p) = k) = \sum_{k=0}^s [V_1(\infty, T_1) - V_1(c - k, T_1)] Prob(D_2(p) = k) \\ &+ \sum_{k=s+1}^c [V_1(\infty, T_1) - V_1(c - k, T_1)] Prob(D_2(p) = k) \\ &+ \sum_{k=c+1}^{\infty} [V_1(\infty, T_1)] Prob(D_2(p) = k) \\ &\leq \epsilon_2(1 - \epsilon_1) + V_1(\infty, T_1)\epsilon_1 \end{aligned} \quad (10.49)$$

finalmente, como $V_1(\infty, T_1)$ es acotado de la expresión anterior es claro que:

$$V_1(\infty, T_1) - \sum_{k=0}^c [V_1(c - k, T_1)] Prob(D_2(p) = k)$$

puede hacerse tan cercana a cero como se desee y por tanto se cumple que

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^c [V_1(c - k, T_1)] Prob(D_2(p) = k) = V_1(\infty, T_1) \quad (10.50)$$

De esta forma el resultado para p_2^{min} queda probado.

Para demostrar el resultado de p_2^{max} se utiliza la función $V_2(1, p)$ que lo caracteriza.

$$\begin{aligned} V_2(1, p) &= p(1 - Prob(D_2(p) = 0)) + V_1(1, T_1) Prob(D_2(p) = 0) \\ Prob(D_2(p) = 0) &= e^{-\lambda T_2(1-F(p))} \end{aligned} \quad (10.51)$$

maximizando $V_2(1, p)$, es decir, derivando e igualando a 0 se obtiene el resultado buscado. ■

10.10 PARTE J

Proposición

$$\frac{\partial}{\partial c_1} \theta(c_1, c_2) \geq 0$$

$$\frac{\partial}{\partial c_2} \theta(c_1, c_2) \leq 0$$

Demostración

Sean $M(c_1, c_2)$ el número esperado de unidades vendidas entre las dos tiendas cuando el precio cobrado es el óptimo $p(c_1, c_2)$. Luego se tiene que:

$$VV_1(c_1, c_2) = p(c_1, c_2)M(c_1, c_2) \quad (10.52)$$

o bien,

$$p(c_1, c_2) = \frac{VV_1(c_1, c_2)}{M(c_1, c_2)} \quad (10.53)$$

En forma análoga si $N_i(c_i)$ representa el número de unidades vendidas en la tienda i cuando el precio cobrado es el óptimo $p_i(c_i)$, se tendrá que:

$$\begin{aligned} p_1(c_1) &= \frac{V_1^1(c_1)}{N_1(c_1)} \\ p_2(c_2) &= \frac{V_1^2(c_2)}{N_2(c_2)} \end{aligned} \quad (10.54)$$

A partir de las condiciones anteriores y de (4.20) se tiene que:

$$VV_1(c_1, c_2) = \theta(c_1, c_2) \frac{M(c_1, c_2)}{N_1(c_1)} V_1^1(c_1) + (1 - \theta(c_1, c_2)) \frac{M(c_1, c_2)}{N_2(c_2)} V_1^2(c_2) \quad (10.55)$$

Luego de (10.55) se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial VV_1(c_1, c_2)}{\partial V_1^1(c_1)} &= \theta(c_1, c_2) \frac{M(c_1, c_2)}{N_1(c_1)} \\ \frac{\partial VV_1(c_1, c_2)}{\partial V_1^2(c_2)} &= (1 - \theta(c_1, c_2)) \frac{M(c_1, c_2)}{N_2(c_2)} \end{aligned} \quad (10.56)$$

y por tanto se cumple que:

$$R(c_1, c_2) \equiv \frac{\frac{\partial VV_1(c_1, c_2)}{\partial V_1^1(c_1)}}{\frac{\partial VV_1(c_1, c_2)}{\partial V_1^2(c_2)}} = \frac{\theta(c_1, c_2)N_2(c_2)}{1 - \theta(c_1, c_2)N_1(c_1)} \quad (10.57)$$

El término $R(c_1, c_2)$ corresponde al cociente entre el incremento marginal de $VV_1(c_1, c_2)$ frente a variaciones de $V_1^1(c_1)$ dividido por el incremento marginal de $VV_1(c_1, c_2)$ frente a variaciones de $V_1^2(c_2)$. Frente a un aumento de c_1 sólo aumentará $V_1^1(c_1)$ mientras que $V_1^2(c_2)$ permanece constante y por tanto el aumento en $VV_1(c_1, c_2)$ se debe fundamentalmente al incremento en $V_1^1(c_1)$ de lo cual se tendrá que:

$$\frac{\partial R(c_1, c_2)}{\partial c_1} \geq 0 \quad (10.58)$$

Finalmente un aumento en c_1 significa aumentar $N_1(c_1)$ manteniéndose constante $N_2(c_2)$, luego de esto e imponiendo que (10.58) se satisfaga en (10.57) se tiene necesariamente que:

$$\frac{\partial \theta(c_1, c_2)}{\partial c_1} \geq 0$$

La otra condición de la proposición es simétrica a la anterior basta considerar la función $\eta(c_1, c_2) = 1 - \theta(c_1, c_2)$. ■

10.11 PARTE K

Para simplificar el algebra de la demostración se asumirá que el inventario es una variable continua, esto conlleva a suponer que existen funciones de densidad $g_1(c_1, p)$ y $g_2(c_2, p)$ para las demandas en las tiendas 1 y 2 respectivamente. La función de beneficio esperado para el modelo de dos tiendas es entonces:

$$VV_1(c_1, c_2, p) = p[c_1 + c_2 - \int_0^{c_1} (c_1 - x)g_1(x, p)dx - \int_0^{c_2} (c_2 - y)g_2(y, p)dy] \quad (10.59)$$

œœ recordando que $c_1 + c_2 = I$ constante es posible maximiza la expresión anterior derivando con respecto a c_1 e igualando a 0, de la cual se obtiene:

$$\int_0^{c_1} g_1(x, p)dx = \int_0^{c_2} g_2(y, p)dy \quad (10.60)$$

y por tanto los niveles óptimos de c_1 y c_2 deben satisfacer:

$$Prob(D_1(p) \leq c_1) = Prob(D_2(p) \leq c_2) \quad (10.61)$$

■

Chapter 11

ANEXO V

Producto 1 CD_1

Tienda	Inventario Inicial	97 Días \$ 11450	7 Días \$ 7890	8 Días \$ 7890	14 Días \$ 7890	6 Días \$ 7890
CENT.	560	177	21	28	92	17
P.A.	300	87	17	14	43	21
P.V.	300	96	18	17	50	17
PROV	145	52	11	10	21	16
A.C.	200	71	7	6	12	11
V.M.	260	68	16	27	24	23
RANC	120	18	4	9	17	7
CAL.	40	8	4	1	2	0

Producto 2 CD_2

Tienda	Inventario Inicial	97 Días \$ 11450	7 Días \$ 7890	8 Días \$ 7890	14 Días \$ 7890	6 Días \$ 7890
CENT.	210	19	27	28	27	89
P.A.	112	24	12	14	9	14
P.V.	120	60	2	17	1	25
PROV	56	20	9	10	2	15
A.C.	75	19	7	6	4	3
V.M.	98	70	8	27	3	6
RANC	45	10	0	9	2	15
CAL.	10	3	0	1	0	1

Producto 3 CD_3

Tienda	Inventario Inicial	97 Días \$ 11500	7 Días \$ 11500	8 Días \$ 11500	14 Días \$ 11500	6 Días \$ 7890
CENT.	45	54	6	7	35	10
P.A.	41	26	2	2	4	1
P.V.	21	32	5	4	6	6
PROV	22	29	0	0	4	1
A.C.	24	2	0	0	0	0
V.M.	10	12	2	1	14	4
RANC	21	17	0	0	3	0
CAL.	0	0	0	0	0	0

Producto 4 CD₄

Tienda	Inventario Inicial	97 Días \$ 10250	7 Días \$ 10250	8 Días \$ 10250	14 Días \$ 10250	6 Días \$ 7890
CENT.	166	36	5	9	40	18
P.A.	34	25	1	0	2	0
P.V.	81	40	5	7	13	7
PROV	34	24	4	3	3	0
A.C.	34	19	2	3	2	0
V.M.	60	24	2	7	17	4
RANC	18	9	0	1	0	1
CAL.	0	0	0	0	0	0

Producto 5 CD₅

Tienda	Inventario Inicial	97 Días \$ 13500	7 Días \$ 13500	8 Días \$ 13500	14 Días \$ 13500	6 Días \$ 9900
CENT.	56	40	1	2	2	2
P.A.	70	53	7	4	6	0
P.V.	36	29	2	3	2	0
PROV	36	35	0	0	0	0
A.C.	14	13	0	0	0	0
V.M.	36	36	0	0	0	0
RANC	4	3	0	0	0	0
CAL.	0	0	0	0	0	0

Producto 6 CD₆

Tienda	Inventario Inicial	97 Días \$ 13500	7 Días \$ 11290	8 Días \$ 11290	14 Días \$ 11290	6 Días \$ 9900
CENT.	36	21	2	1	9	0
P.A.	45	15	3	1	11	7
P.V.	27	5	2	2	8	3
PROV	41	9	0	0	1	3
A.C.	18	6	1	0	2	0
V.M.	20	6	2	3	6	6
RANC	12	4	1	0	1	0
CAL.	6	0	0	0	0	2